МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени А.А. ЕЖЕВСКОГО

Клибанова Юлия Юрьевна

Вржащ Евгений Эдуардович

Курс физики: физические основы механики, молекулярной физики и термодинамики

Молодёжный 2021

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А.А. ЕЖЕВСКОГО

Факультет энергетический
Кафедра электрооборудования и физики

Клибанова Юлия Юрьевна
Вржащ Евгений Эдуардович

Курс физики: физические основы механики, молекулярной физики и термодинамики

Учебное пособие

Молодёжный 2021

УДК 531+ 539.1 +536](075.8)
К 49

Печатается по решению научно-методического совета Иркутского ГАУ
им. А. А. Ежевского, (протокол № 1 от 29 ноября 2021 года)

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор кафедры ЭО и физики Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского Кузнецов Борис Фёдорович

Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук Мишин Владимир Виленович.

Клибанова, Ю. Ю.

Курс физики : физические основы механики, молекулярной физики и термодинамики : учебное пособие / Ю. Ю. Клибанова, Е. Э. Вржащ ; Иркут. гос. аграр. ун-т им. А. А. Ежевского. – Молодежный : Изд-во ИрГАУ, 2021. – 104 с. – Текст : электронный.

Основанная цель данного пособия рассмотрение фундаментальных законов физической механики, молекулярной физики и термодинамики. Пособие направлено на развитие творческих способностей студентов, научного мышления и активизацию познавательной деятельности. В пособии даны основные определения и понятия классической механики, сформулированы элементы механики жидкостей и газов, колебаний, а также рассмотрены основные законы молекулярно-кинетической теории и термодинамики.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 – Агроинженерия, 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника, 13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника высшего профессионального образования бакалавриата. Пособие также может быть полезно специалистам смежных областей и широкого круга читателей, интересующихся фундаментальными законами физики.

ВВЕДЕНИЕ

Тысячелетиями изучались различные явления в природе. Люди наблюдали за многообразными изменениями в природе и использовали эти знания для определения времени суток, времени года, времени посева и уборки урожая. Вскоре знания стали приобретать научный характер, появились первые книги о явлениях природы. На древнегреческом слово «фюзис» означает «природа», отсюда наука стала называться физикой. Вскоре у ученых возникла идея о материальности окружающего нас мира. Физическая теория была разделена на классическую и квантовую. Основоположником классической физики стал И. Ньютон, сформулировавший основные законы механики, и А. Эйнштейн, сформулировавший теорию релятивисткой механики. Начало квантовой физики было положено М. Планком, выдвинувшим гипотезу квантов. Переломным моментов в физике стало открытие электрона в 1897 году. Первичные понятия и представления приобрели иной характер и, даже у некоторых физиков возникла идея об исчезновении материи. Однако дальнейшее развитие физической науки привело к диалектическому материализму, изучающему наиболее общие закономерности развития природы, общества, человеческого мышления [5].

Подготовка специалистов в области техники и технологий в аграрном вузе имеет свои особенности. Поэтому формирование фундаментальных и прикладных знаний для теоретической подготовки инженера аграрном вузе является актуальным. Необходимо создавать фундаментальные физические знания с прикладными исследованиями, как в области физики, так и в области профессиональных дисциплин. Следовательно, изучение законов физики образует фундаментальную основу для изучения дисциплин технического направления в аграрном образовании.

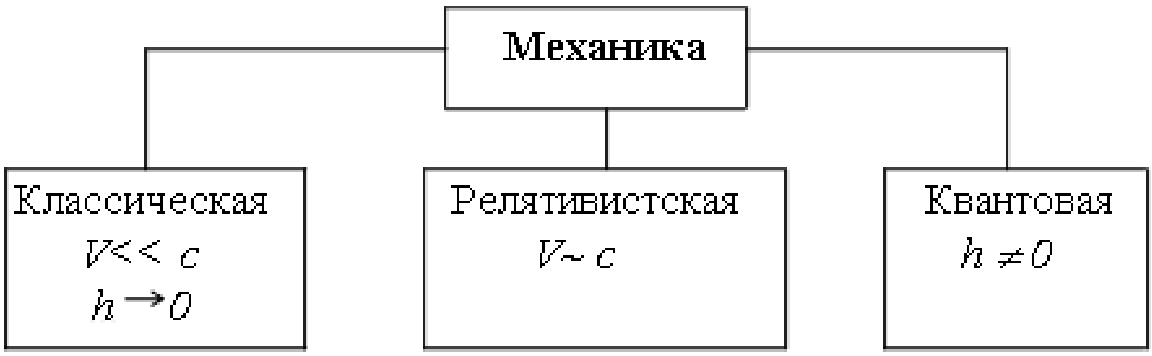
В учебном пособии рассмотрены основные законы механики, элементы механики жидкостей и газов, механические колебания, законы молекулярной физики и термодинамики. Данное издание является продолжением серии пособий по физике, изданных ранее авторами: «Физика: электричество и магнетизм», «Курс физики: оптика, атом, атомное ядро, элементарные частицы», «Физика микромира» [1-4].

Раздел I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1 Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения. Кинематические уравнения движения материальной точки

При изучении механики будем полагать, что скорости движущихся тел далеки от скорости света. Такой раздел механики считается классическим (в отличие от квантовой и релятивисткой механики). Основная задача классической механики – это определение положения тела в любой момент времени. Для решения этой задачи нужно ввести некоторые понятия механики.

Механическое движение - это перемещение материальных тел в пространстве с течением времени. Мир материальных объектов многообразен, и в зависимости от условий, в которых происходит движение, оно может подчиняться различным закономерностям. Поэтому принято выделять три различных типа механик:



Здесь: $\boldsymbol{c} = 3 \cdot 10^{8}$ м/с - скорость света в вакууме; $\boldsymbol{h} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ - постоянная Планка.

Пространство, в котором мы существуем, обладает следующими особенностями: оно трехмерно, однородно и изотропно. Понятие ***трехмерности*** означает, что для описания положения точки в таком пространстве необходимо задать три координаты (это или декартовы координаты x, y, z или сферические координаты r, θ, φ или какие-нибудь другие координаты, но их всегда будет три). ***Однородность*** - это одинаковость свойств в любом месте пространства. В применении к физике это означает следующее: допустим, что в каком-то месте пространства проводится некоторый физический эксперимент. Если провести точно такой же эксперимент в другой точке пространства, но при этом точно воспроизвести все условия эксперимента, то полученные результаты в обоих случаях будут одинаковы. ***Изотропность*** - это одинаковость свойств по различным направлениям. То есть при проведении эксперимента поворот установки на любой угол не изменит результатов (если, конечно, при этом не изменились условия его проведения).

Время в классической механике считается абсолютным, т.е. скорость течения времени одинакова в любых точках пространства и не зависит от скорости движения тела. Это справедливо только для скоростей $V << c$, в специальной теории относительности доказывается, что при $V \sim c$ течение времени зависит от скорости движения тела. Но в любом случае направление хода времени только одно - от прошлого к будущему.

Механика изучает простейшую форму движения материи – перемещение материальных тел, т.е. изменение их взаимного расположения с течением времени. ***Система отсчета*** – совокупность тела отсчета, системы координат и прибора для измерения времени (часов, секундомера и т.п.). Не зная системы отсчета невозможно решить основную задачу механики, т.е. определения положения тела в любой момент времени. Под ***телом отсчета*** понимается обычно начало координат. Система координат чаще всего является декартовой: линейной, двухмерной или трехмерной в зависимости от задачи.

Рассмотрим, например, движение точки, находящейся на ободе катящегося колеса (рисунок 1).

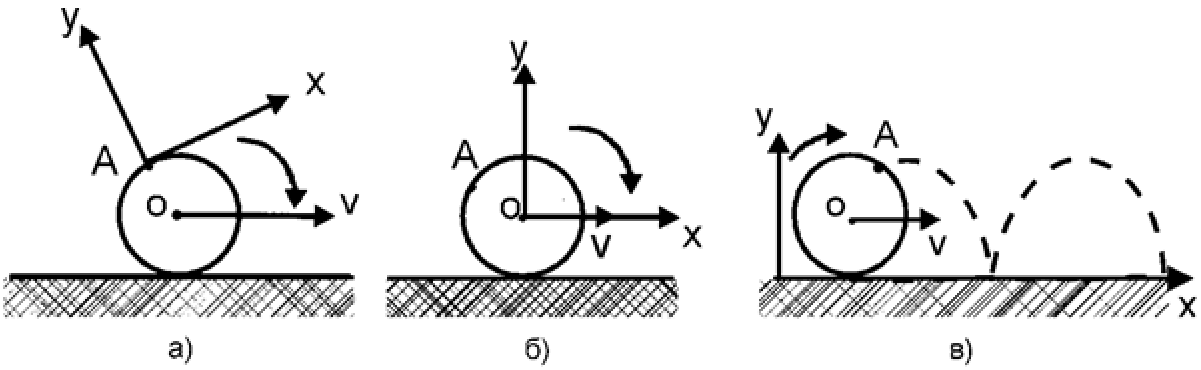


Рисунок 1 –Движение точки на ободе колеса

Систему отсчета можно связать с самой этой точкой (рисунок 1а). В этой системе отсчета точка ***A*** будет неподвижна, следовательно, никакой информации о движении точки ***A*** мы не получим. Если связать систему отсчета с осью колеса, точка ***A*** в этой системе будет двигаться по окружности (рисунок 1б). Это позволит рассчитать угловые характеристики движения точки ***A***. В системе отсчета, связанной с поверхностью Земли (рисунок 1в), точка будет двигаться по циклоиде, и мы сможем получить полную информацию о движении точки относительно земной поверхности. Таким образом, выбор системы отсчета определяется характером движения тела и поставленной задачей.

С выбранной системой отсчета необходимо связать *систему координат*. Это может быть либо декартова система координат (как на рисунке 1), либо сферическая, либо цилиндрическая системы. Выбор системы координат диктуется конкретным видом задачи, которую необходимо решить, и соображениями удобства. В курсе физики чаще всего используют декартову систему.

Изучение законов движения естественно начать с движения тела, размеры которого малы. Движение такого тела происходит наиболее просто, так как можно не принимать во внимание вращение тела или перемещение различных частей тела друг относительно друга. ***Тело,*** размерами которого можно пренебречь при рассмотрении его движения, называется ***материальной точкой.*** Материальная точка это простейшая физическая модель в механике. Например, в астрономических расчетах размер Земли очень мал и им можно пренебречь и полагать Землю как материальную точку. С другой стороны, этого нельзя делать при изучении падения тел на поверхность Земли, при анализе траектории полета самолета и т.д.

Рассмотрим движение материальной точки. Материальная точка обладает тремя степенями свободы движения, т.е. ее положение в пространстве полностью определено, если заданы три ее координаты, например, декартовы координаты *X, Y, Z*.

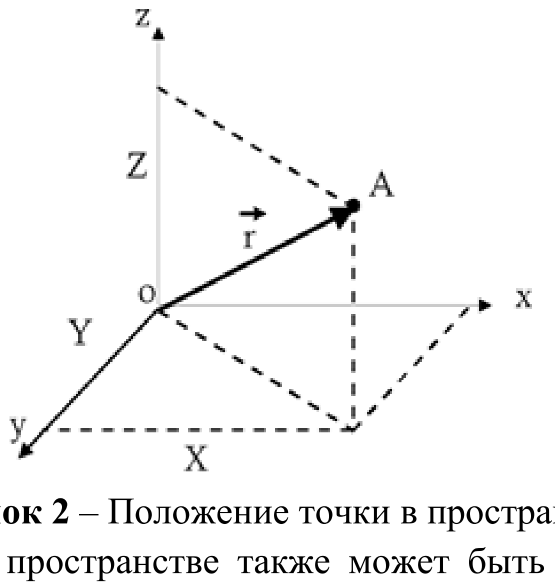


Рисунок 2 – Положение точки в пространстве

Положение точки в пространстве также может быть задано ее ***радиус - вектором*** $\vec{r}$, т.е. вектором, проведенным из начала координат в данную точку пространства (рисунок 2). Радиус-вектор связан с координатами следующим образом:

$$\vec{r} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}\,, \tag{1}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты или единичные векторы вдоль координатных осей *x, y, z*.

Модуль радиуса-вектора:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (2)$$

При движении материальной точки ее координаты с течением времени меняются. Уравнения, описывающие зависимость координат от времени, называют ***кинематическими уравнениями движения*** :

$$\begin{aligned} X &= X(t) \\ Y &= Y(t) \\ Z &= Z(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

Эти три скалярных уравнения эквивалентны векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (4)$$

тоже являющемуся *кинематическим уравнением движения*.

Траектория движения – линия, описывающая движение материальной точки. Траектория может быть любой: прямой, окружностью, дугой, зигзагом и т.п. Если уравнение траектории известно, то положение точки в пространстве можно задать с помощью ***естественной координаты s. Путь s*** это длина траектории. Тогда кинематическим уравнением движения будет уравнение

$$s = s(t) \qquad (5)$$

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории (рисунок 3).

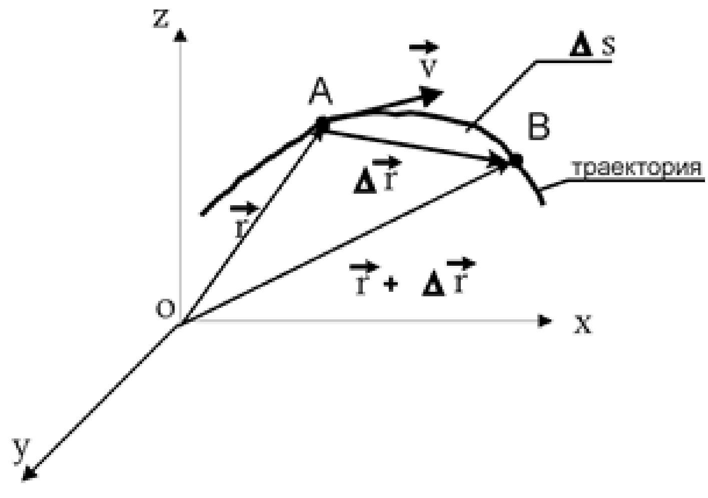
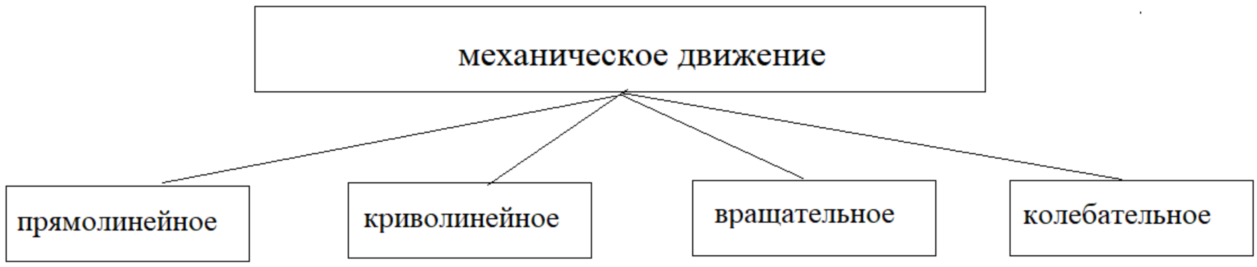


Рисунок 3 – Произвольное движение материальной точки в декартовой системе координат

В некоторый момент времени *t* точка находилась в положении ***A***, ее радиус-вектор был $\vec{r}$. За время Δt точка переместилась в положение ***B***, ее радиус-вектор стал $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. Длина участка траектории ***AB***, пройденного точкой за время Δt, есть *длина пути* или ***путь*** – является скалярной величиной. Вектор

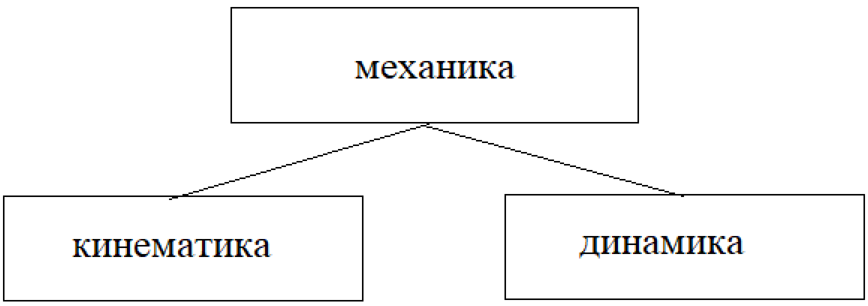
$\Delta\vec{r}$, соединяющий начальные и конечные точки траектории называется *перемещением*. Естественно, что при прямолинейном движении модуль вектора перемещения равен пройденному пути: $\Delta r = \Delta S$. При движении по криволинейной траектории их величины различны.

В зависимости от формы траектории механическое движение может иметь разные формы



При этом прямолинейное и криволинейное движение считается поступательным, потому что все материальные точки при движении тел описывают траектории равной длины. И математические формулы прямолинейного и криволинейного движения имеют одну структуру.

В свою очередь механика состоит из двух основных разделов: кинематики и динамики.



Кинематика – это раздел механики, изучающий движение тел без учета причин, вызывающих движение тел. ***Динамика***, раздел механики, изучающий движение тел с учетом с учетом этих причин. Причинами являются силы. То есть в кинематике о силах не упоминается. ***Статика*** является частным случаем динамики, когда действующие силы уравновешивают друг друга и тело в данной системе отсчета остается неподвижным

1.2 Кинематика поступательного движения материальной точки Основными кинематическими характеристиками поступательного движения являются скорость и ускорение

1.2.1 Скорость материальной точки.

Скорость $\vec{V}$ это величина векторная, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (6)$$

Средней скоростью называется величина характеризующая среднее перемещение точки в единицу времени, называется движения за время $\boldsymbol{\Delta t}$. Направление средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения $\boldsymbol{\Delta\vec{r}}$**.**

При достаточно большом значении времени средняя скорость есть скалярная величина:

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (7)$$

Если в этом выражении перейти к пределу при $\boldsymbol{\Delta t \to 0}$, то получим выражение для мгновенной скорости:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (8)$$

Мгновенная скорость $\vec{V}$, таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени.

Рассмотрим движение материальной точки по криволинейной траектории (рисунок 4). Пусть движение из пункта **A** в пункт **B** прошло за время Δt.

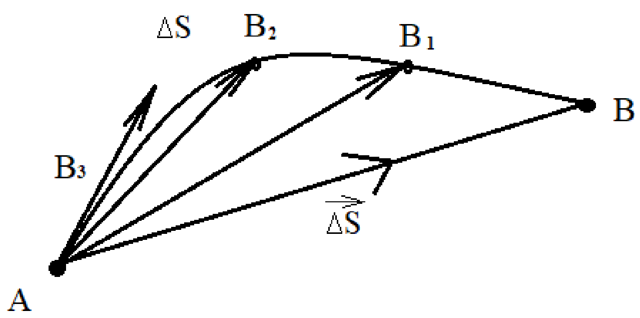


Рисунок 4 – Произвольное движение точки

При уменьшении интервала времени конечное положение точки будет перемещаться к начальной точке **А** (соответственно положения **В₁, В₂**) и в какой-то момент времени вектор перемещения из хорды перейдет в касательную к траектории движения и будет представлять собой вектор мгновенной скорости (точка **В₃**). Математически это можно выразить формулой

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{9}$$

Таким образом, в механике при поступательном движении материальной точки и твердого тела различают среднюю скорость при достаточно больших значениях времени (скалярная величина) (7) и мгновенную скорость в данный момент времени (векторная величина) (9).

Единица измерения скорости в международной системе единиц СИ равна

$$[V] = \frac{м}{c}$$

1.2.2 Ускорение материальной точки. Составляющие ускорения.

Если движение материальной точки или тела происходит с изменение скорости, то необходимо вводить характеристику быстроты изменения скорости, которая называется ***ускорением.***

Пусть материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории из точки **А** в точку **В** за время Δt обладала в точке **А** мгновенной скоростью $\vec{V_1}$, а в точке **В** – скоростью $\vec{V_2}$ (рисунок 5).

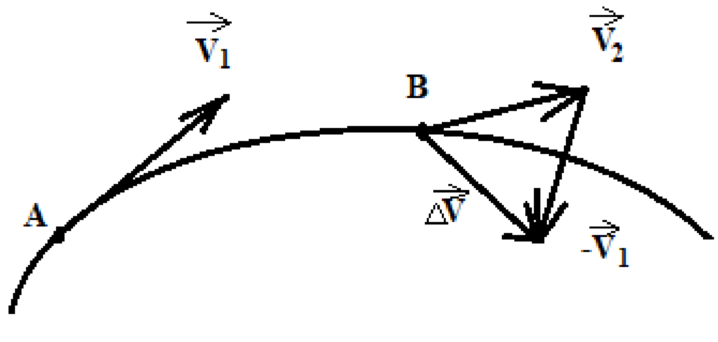


Рисунок 5 – Движение точки по криволинейной траектории

Тогда вектор изменения скорости равен

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

Ускорение *a*

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \qquad (10)$$

При этом, как для скорости, возникает среднее и мгновенное ускорение для больших и малых интервалов времени. Обычно ***мгновенное ускорение*** называют просто ускорением. Математически эти формулы будут следующими

– среднее ускорение

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \qquad (11)$$

– мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (12)$$

Кроме того, необходимо отметить, что в отличие от скорости все виды ускорения являются векторными величинами и имеют направление в пространстве.

При неравномерном движении по криволинейной траектории (рисунок 6) вектор ускорения имеет две составляющих: касательную, которая называется тангенциальной a_τ, и перпендикулярную к ней нормальную a_n (от слова «нормаль» - в переводе перпендикуляр), которую еще называют центростремительной

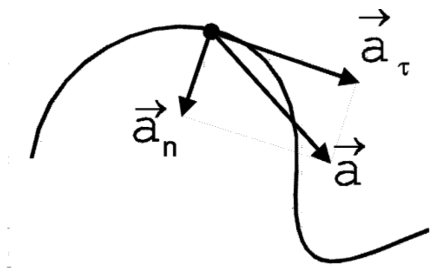


Рисунок 6 – Составляющие ускорения криволинейного движения

Алгебраически значение полного ускорения a определяется по теореме Пифагора:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (13)$$

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 \Rightarrow a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad (14)$$

Единица измерения ускорения

$$[a] = м/с^2.$$

Составляющие ускорения определяются

– ***тангенциальное ускорение:***

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \qquad (15)$$

– нормальное (центростремительное) ускорение:

$$a_n = \frac{V^2}{R} \qquad (16)$$

R - радиус кривизны траектории в данной точке, и вектор нормального ускорения направлен по радиусу к центру кривизны траектории.

1.3 Кинематика вращательного движения материальной точки

1.3.1 Угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение, период, частота вращения

При вращательном движении твердого тела вокруг вертикальной оси любой геометрической формы все его материальные точки описывают окружности.

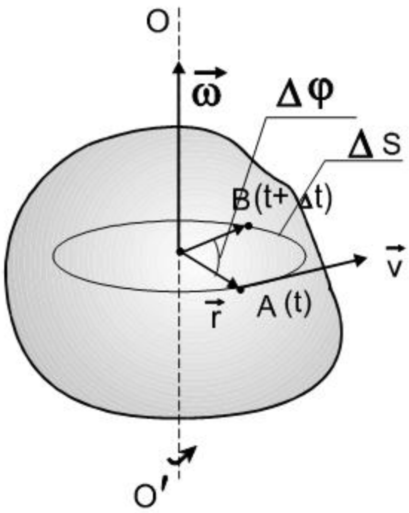


Рисунок 7 – Произвольное вращение материальной точки вокруг оси.

Пусть произвольная материальная точка, вращаясь вокруг вертикальной оси, за время описала дугу на траектории вращения **AB** (рисунок 7). Её радиус-вектор $\vec{r}$ повернулся на угол $\Delta\varphi$ (***угол поворота***).

Единица измерения угла поворота в СИ

$$[\Delta\varphi] = \text{рад (радиан)}$$

$$1\,рад = \frac{360^0}{2\pi} = \frac{360^0}{6,28} \approx 57^0$$

Угловая скорость – отношение угла поворота к интервалу времени, за которое этот поворот произошел

– средняя угловая скорость

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{17}$$

– мгновенная угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{18}$$

Угловая скорость это первая производная от угла поворота радиус-вектора точки по времени. Угловая скорость является аксиальным вектором, т.е. вектором, направленным по оси вращения. Направление вектора задается правилом правого винта: вектор угловой скорости совпадает по направлению с поступательным движением острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности.

Единица измерения угловой скорости в СИ

$[\omega]$ = рад/с или $с^{-1}$ (радиан в секунду)

Если $\omega = const$, то вращение ***равномерное*** и его можно охарактеризовать ***периодом вращения T*** – временем, за которое тело совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π. Так как промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует $\Delta\varphi = 2\pi$, то

– угловая скорость

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

– период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при его равномерном вращении в единицу времени, называется ***частотой вращения***:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Если вращение будет неравномерным, то вводится еще понятие ***углового ускорения***

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{19}$$

Вектор углового ускорения направлен по оси вращения. Если движение ускоренное, то он параллелен вектору угловой скорости, а если движение замедленное, то антипараллелен.

Единица измерения углового ускорения в СИ

$$[\varepsilon] = \text{рад/с}^2$$

1.3.2 Связь между линейными и угловыми характеристиками вращательного движения

Установим связь между линейной и угловой скоростью и линейным и угловым ускорением при вращательном движении.

– ***для скорости***

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R} \Rightarrow \omega = \frac{\Delta S}{R\cdot\Delta t} = \frac{V}{R}$$

следовательно

$$V = \omega R \quad (20)$$

– ***для ускорения***

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} \Rightarrow \omega^2 R$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega R\right) = R\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R \quad (21)$$

Контрольные вопросы

1. Что такое материальная точка? Приведите примеры, когда морской корабль можно полагать материальной точкой и когда нет
2. Что такое путь и перемещение?
3. Что называется системой отсчета?
4. Дать понятие средней и мгновенной скорости
5. Что характеризуют тангенциальное и нормальное ускорения? Каковы их формулы?
6. Чем отличается кинематика от динамики?
7. Определить линейную (в м/с) и угловую (в рад/с) скорость суточного вращения тела на поверхности Земли вокруг земной оси, если радиус Земли 6370 км

1.4 Динамика материальной точки и твердого тела

1.4.1.Понятие об инерциальных системах отсчета. Законы Ньютона

В отличие от кинематики в динамике рассматриваются физические законы с учетом причин, вызывающих движение тел. А таковыми причинами являются силы. Впервые систематизировал все научные наблюдения над механическими силами и законами механики сделал английский ученый Ньютон в виде трех законов. Кратко рассмотрим эти законы.

I закон Ньютона

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения пока воздействие на него других тел не выведет его из этого состояния.

Это свойство называется ***инерцией*** и мерой инертности тел является ***масса.*** Масса ***m*** в системе СИ измеряется в кг. Системы отсчета, в которых выполняется этот закон, называются ***инерциальными***. Их множество.

II закон Ньютона

В отличие от первого закона Ньютона этот закон является количественным и связывает в формулу меру инертности тела массу с причиной, вызывающей движения тела, - силой. Так как при движении тела возникает ускорение, в опытах было установлено, что ускорение тело всегда прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе тела. Если подобрать единицы измерения физических величин такими, чтобы коэффициент пропорциональности был самым простым, т.е. равен единице, то формула этого закона имеет вид

$$\vec{a} \square \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} \square m\vec{a}$$

или

$\vec{F} = km\vec{a}$, где $k = 1$ (коэффициент пропорциональности).

Таким образом, математически II закон Ньютона примет вид

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{22}$$

В данной формуле сила представляет собой векторную сумму всех сил, действующих на тело. Единицей измерения массы является килограмм – кг. Единицей измерения ускорения – м/с^2. Тогда единица измерения силы в СИ будет [F]=[m] [a]=кг·м/с^2=Н (Ньютон)

Учитывая, что ускорение это вторая производная от радиуса-вектора по времени

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F} \qquad (23)$$

Уравнение (23) – ***динамическое уравнение движения***

Другую форму закона движения материальной точки и системы материальных точек можно получить, если ввести понятие ***импульса***.

Для этого запишем второй закон Ньютона, используя определение ускорения, как первую производную от скорости по времени, при условии, что масса величина постоянная:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \qquad (24)$$

Произведение массы материальной точки на ее скорость называют ***импульсом*** материальной точки, то есть:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V} \qquad (25)$$

Теперь второй закон Ньютона запишется так:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (26)$$

Сила, действующая на материальную точку, равна производной от импульса материальной точки по времени.

Единица измерения импульса в СИ будет:

[P]=[m] [V]=кг·м/с

III закон Ньютона

Два взаимодействующих тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению.

Надо понимать, чти силы, однако, не уравновешивают друг друга, т.к. приложены к разным телам (рисунок 8).

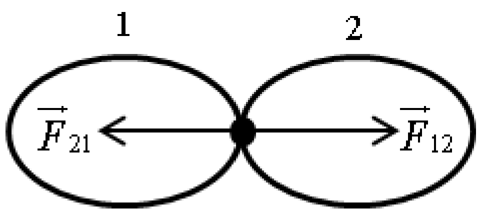


Рисунок 8

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}} \qquad (27)$$

Из этого закона следует, что силе действия должна противодействовать сила противодействия, противоположно направленная. Иначе не будет движения. Например, велосипедист не сможет поехать, если не будет трения колес о дорогу, будет буксовать.

1.4.2 Механические силы (сила всемирного тяготения, сила тяжести, сила упругости, сила трения)

Все многообразие механических сил в природе можно свести к трем видам сил: всемирного тяготения (для Земли силы тяжести), силе упругости и силе трения.

1. ***Сила всемирного тяготения***

Как определил Ньютон все тела в природе взаимодействуют между собой с силами всемирного тяготения. Например, два тела с массами m_1 и m_2, находящиеся на расстоянии r друг от друга, притягиваются с силой

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{28}$$

где G-гравитационная постоянная, равная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²

Сила тяжести – это сила притяжения тела к Земле. Для нее закон всемирного тяготения имеет формулу

$$F = G\frac{mM}{R^2} \tag{29}$$

где m – масса тела, M – масса Земли, R – радиус Земли.

Отсюда следует, что тело находится в состоянии свободного падения в вакууме, то его ускорение равно

В данном разделе необходимо различать разницу между понятиями сила тяжести и вес тела. ***Сила тяжести*** $\vec{F}_T$ – это сила притяжения тела к Земле и вектор силы тяжести направлен от центра массы тела перпендикулярно вниз (к Земле). ***Вес тела*** $\vec{P}$ – это сила давления на опору или подвес. У силы тяжести и веса разные точки приложения сил (см. рисунок 9)

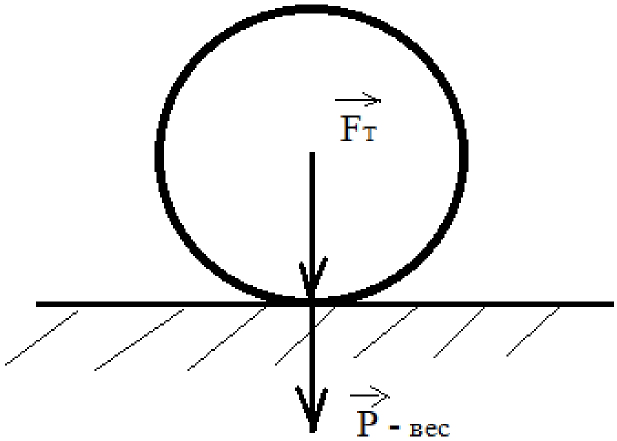


Рисунок 9 – Силы в природе

Для тела, находящегося в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения при вертикальном движении вверх или вниз численные значения силы тяжести и веса совпадают. Если же тело движется в вертикальном направлении ускоренно, то эти значения будут различны. Например, при ускоренном движении лифта вверх вес тела будет больше силы его тяжести, а при движении лифта вниз наоборот, меньше силы тяжести.

В состоянии невесомости при полете космического корабля по круговой орбите продолжает действовать сила тяжести, а вес тел внутри корабля равен нулю, т.к. нет воздействия тел на опоры.

2.Сила упругости

Сила упругости – это сила, возникающая при деформации тела и направленная в сторону, противоположную этой деформации.

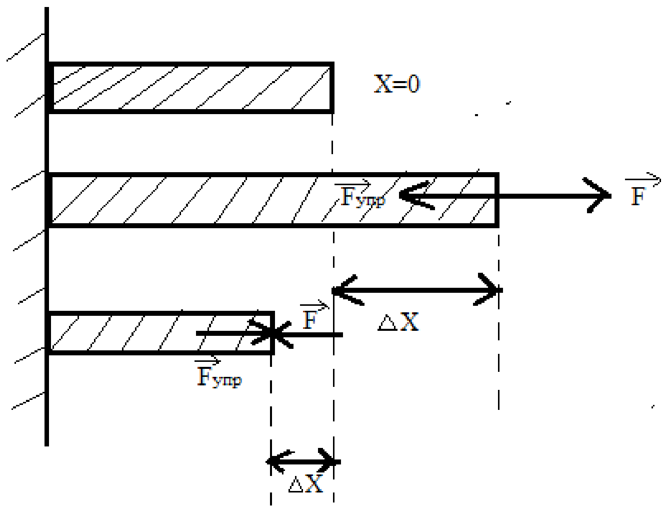


Рисунок 10 – Силы упругости

Эта сила для упругих тел при обычных нагрузках подчиняется ***закону Гука***

$$F_{упр} = -k\Delta x, \tag{30}$$

где k – коэффициент жесткости материала тела, а Δx – величина деформации тела.

3.Сила трения

В реальных условиях любое движение тела испытывает трение со стороны поверхности, по которому движется тело и среды, ее окружающей. Различают трение покоя, скольжения и качения. Физическая причина трения заключается в степени гладкости поверхности соприкасающихся тел и зависит от молекулярной структуры тел. На рисунке 11, на примере тела, находящегося в состоянии покоя на наклонной плоскости, показаны все механические силы, приложенные к телу, в том числе и сила трения. Вектор силы трения всегда направлен в противоположную сторону движению тела либо тенденции движения в случае трения покоя.

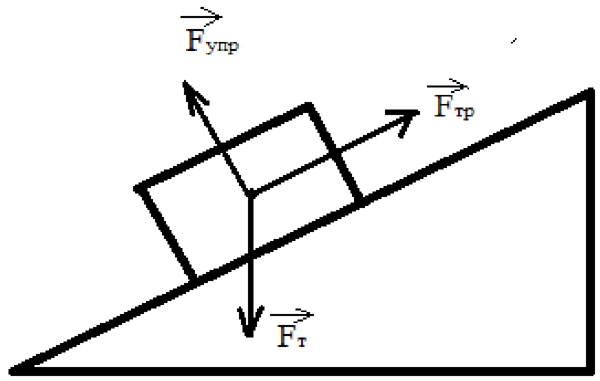


Рисунок 11 – Силы в природе

Характеристикой трения является ***коэффициент трения***, который прославляет собой коэффициент пропорциональности между силой трения и силой нормального (т.е. перпендикулярного) давления тела на поверхность. Коэффициент трения имеет значение в диапазоне от 0 до 1.

$$F_{тр} = \mu N \tag{31}$$

μ – коэффициент трения, N – сила нормального давления.

1.4.3 Система материальных точек. Понятие центра масс системы. Закон движения центра масс.

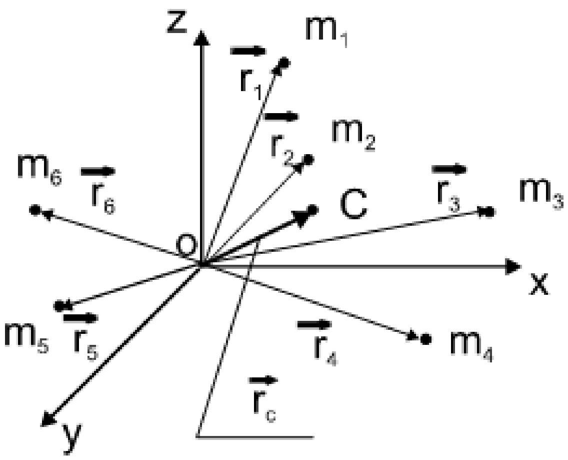


Рисунок 12 – Система материальных точек. Понятие центра масс

Рассмотрим систему материальных точек (рисунок 12). ***Центром масс*** или центром инерции системы материальных точек называется такая точка **C**, радиус-вектор которой:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \, , \qquad (32)$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор i-той точки, $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – масса системы.

Рассмотрим систему материальных точек, на которую действуют силы (рис. 13)

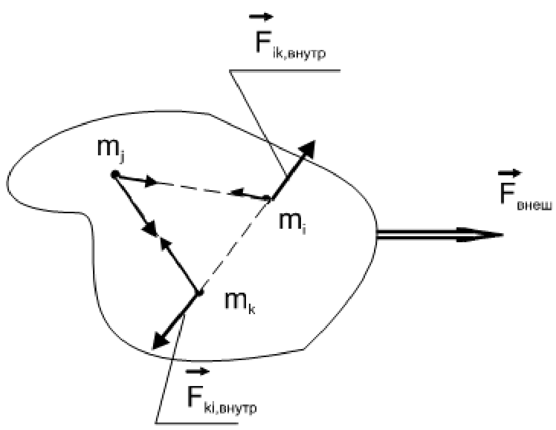


Рисунок 13 – Система материальных точек

Силы взаимодействия между точками этой системы называются ***внутренними***. По третьему закону Ньютона геометрическая сумма всех внутренних сил в любой механической системе равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ik,внеш}=o \qquad (33)$$

Поэтому внутренние силы не могут изменить состояния движения системы как целого. Силы, с которой на точки системы действуют тела, не входящие в систему, т.е. внешние тела, называют ***внешними силами***. Под действием внешних сил изменяется состояние движения системы. Это изменение описывается ***законом движения центра масс***: *центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и на которую действует сила, равная векторной сумме всех внешних сил, приложенных к системе:*

$$m\vec{a}_c=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i,внеш} \qquad (34)$$

Контрольные вопросы

1. Что характеризует масса и сила?
2. Какие виды сил есть в механике? От чего зависит сила трения?
3. Привести примеры, когда вес тела равен силе тяжести, меньше и больше силы тяжести и вообще равен нулю
4. Привести примеры действия III закона ньютона
5. Изобразить график формулы закона Гука

1.5 Энергия, работа, мощность

1.5.1 Механическая работа и мощность

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике рассматривают работу силы, приложенной к данному телу (рисунок 14).

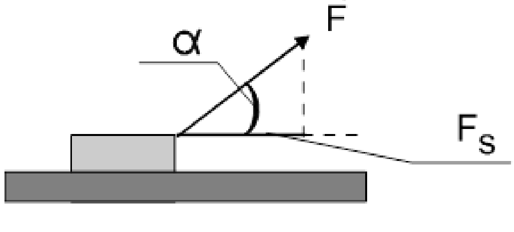


Рисунок 14

Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила $\vec{F}$, составляющая некоторый угол α с направлением перемещения (рисунок 14), то ***работа силы*** равна произведению проекции этой силы на направление движения (F_s) и перемещения точки приложения силы:

$$A = F_s \cdot S = F \cdot S \cdot \cos\alpha \tag{35}$$

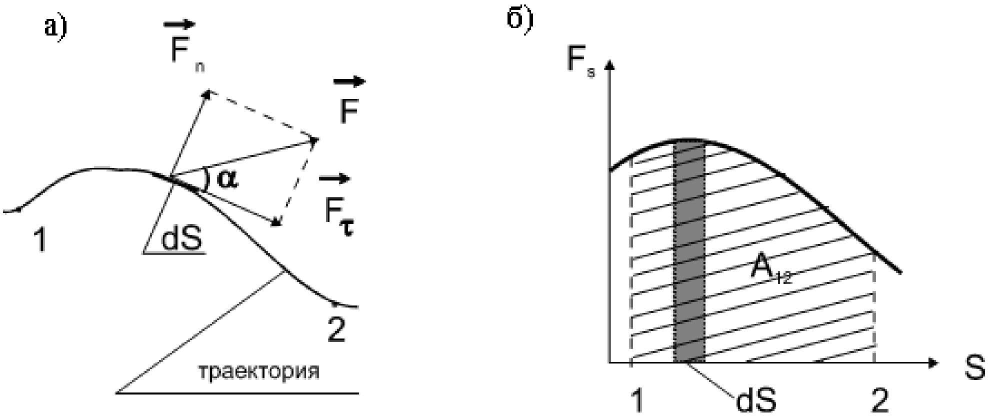


Рисунок 15 – Работа силы

Работа переменной силы определяется $dA = F_s \cdot dS = F \cdot dS \cdot \cos\alpha$, где dS – элементарный прямолинейный путь, на котором сила не изменяется (рис. 15 а).

Работа на пути 1 – 2 определится как интеграл от элементарной работы

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} F_s \cdot dS = \int_{(1)}^{(2)} F \cdot dS \cdot \cos\alpha \tag{36}$$

Эта зависимость представлена графически (рис. 15 б), работа определяется заштрихованной на графике площадью.

– $\alpha < \pi/2$ - работа силы положительна

– $\alpha > \pi/2$ – работа силы отрицательна (работа совершается против данной силы).

– $\alpha = \pi/2$ – работа силы равна нулю, т.е. сила, перпендикулярная к перемещению, работы не совершает.

На практике имеет значение время, в течение которого совершается работа. Поэтому для характеристики механизмов, предназначенных для совершения работы, вводится величина, показывающая, какую работу данный механизм совершает в единицу времени. Эта величина называется ***мощностью***. Механическую мощность обычно обозначают – N.

– средняя мощность – физ. величин, равная отношению работы ΔA к промежутку времени Δt, за который она совершена:

$$N_{cp} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \tag{36}$$

– ***мгновенная мощность*** – предел, к которому стремится средняя мощность при $\Delta t \to 0$

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$$

(37)

Если за время *dt* тело прошло путь *dS*, то элементарная работа, совершенная за это время, равна $dA = F \cdot dS \cdot \cos\alpha = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$, где $d\vec{r}$ - перемещение тела. Тогда мощность может быть выражена так:

$$N = \frac{dA}{dt} = (\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}) = (\vec{F} \cdot \vec{V})$$

(38)

Мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой перемещается точка приложения силы.

Единица измерения работы в СИ:

[*A*]= 1 Н□ м = Дж (Джоуль)

Единица измерения мощности в СИ:

[*N*]= 1 Дж/с = Вт (Ватт)

1.5.2 Энергия как универсальная мера различных форм движения материи. Кинетическая и потенциальная энергии.

Энергия - универсальная количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи. Энергия это мера совершенной работы.

Формы энергии:

– механическая (движение материи)

– тепловая (энергия беспорядочного движения молекул и атомов)

– химическая (химические связи)

– электромагнитная (движение электронов внутри атомов)

– световая (волны)

– ядерная (взаимодействие внутри атомов) и др.

Виды энергии:

– кинетическая энергия

– потенциальная энергия

Кинетическая энергия $E_к$ тела является мерой его механического движения и определяется работой, которую необходимо совершить, чтобы вызвать данное движение.

Если сила F действует на покоящееся тело и вызывает его движение со скоростью V, то она совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину этой работы.

$$dA = dE_к \tag{39}$$

Запишем второй закон Ньютона в скалярной форме и умножим обе части равенства на dS

$$F \cdot dS = m\frac{dV}{dt} \cdot dS \tag{40}$$

Так как $F \cdot dS = dA$, а $\frac{dS}{dt} = V$, то $dA = m \cdot V \cdot dV = dE_к$, следовательно

$$E_к = \int_0^V m \cdot V \cdot dV = \frac{mV^2}{2} \tag{41}$$

Таким образом, для тела массой m, движущегося со скоростью V, ***кинетическая энергия***

$$E_к = \frac{m \cdot V^2}{2} \tag{42}$$

Из формулы (42) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т.е. *кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.*

При выводе формулы (42) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Таким образом, *кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.*

Потенциальная энергия $E_п$ – часть энергии механической системы, определяемая взаимным расположением тел и характером сил взаимодействия между ними. Она не зависит от скорости, а зависит от расстояния, на котором находятся тела. Потенциальная энергия скалярная физ. величина, не имеющая направления.

– потенциальная энергия тела в поле тяготения

$$E_п = mgh \tag{43}$$

– потенциальная энергия упругой деформации

$$E_п = \frac{kx^2}{2} \tag{44}$$

Единица измерения энергии в СИ:

$[E]$= Дж (Джоуль)

1.6 Законы сохранения

1.6.1 Закон сохранения импульса

Закон сохранения импульса – фундаментальный закон природы, который трактуется так – *полный импульс замкнутой системы тел с течением времени не меняется*

$$\vec{p} = m\vec{V} = const \qquad (45)$$

Замкнутой считается система, на которую не действуют внешние силы со стороны других тел.

Если m_1, m_2 - массы взаимодействующих тел, а $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ скорости тел до столкновения и $\vec{V}_1'$, $\vec{V}_2'$ скорости тел после столкновения, то закон сохранения импульса запишется

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2'$$

1.6.2 Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии – энергия не возникает из нечего и не исчезает бесследно, она превращается из одного вида в другой, оставаясь величиной постоянной.

Например, телу, подброшенному вертикально вверх, сообщается некоторая скорость, соответственно кинетическая энергия. Однако, поднимаясь на некоторую высоту, его скорость уменьшается, следовательно, кинетическая энергия уменьшается. Но при этом увеличивается высота, а значит, увеличивается потенциальная энергия. В самой верхней точке скорость станет равна нулю, кинетическая энергия тоже будет равна нулю, а потенциальная энергия будет максимальной. При падении вниз, скорость начнет увеличиваться и в конце падения кинетическая энергия станет максимальной. На сколько уменьшится потенциальная энергия, на столько увеличится кинетическая энергия, то есть будет выполняться закон сохранения энергии.

$$E_к + E_п = const \qquad (46)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии есть ***полная механическая энергия E***

Следовательно, закон сохранения энергии можно записать

$$E = const$$

1.6.3 Применение законов сохранения импульса и энергии к соударению шаров

Рассмотрим: как можно использовать законы сохранения в решении практических задач па примере соударения двух шаров. Существуют два типа удара тел: ***упругие*** и ***неупругие.*** Для наглядности возьмем крайние случаи: взаимодействия абсолютно твердых тел.

1. ***Абсолютно упругий удар***

Допустим один шар массой m_1, имеющий скорость V_1, двигаясь по горизонтальной поверхности, догоняет другой шар массой m_2, у которого скорость V_2. Тела абсолютно твердые и не деформируются после удара. Скорости шаров после удара изменились и стали соответственно $\vec{V}_1'$, $\vec{V}_2'$ (рисунок 16)

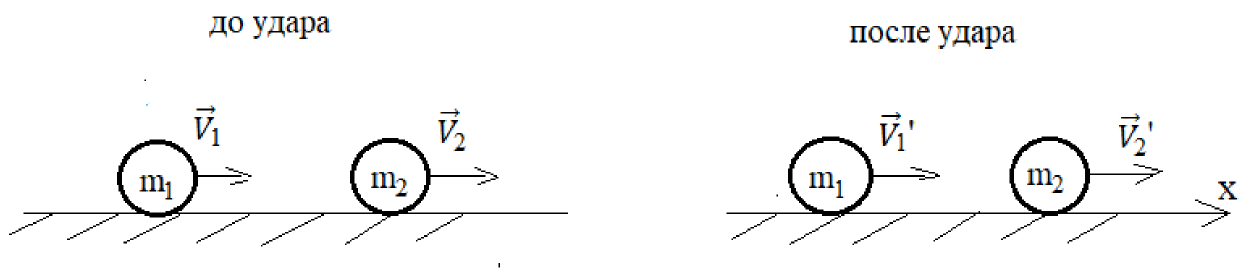


Рисунок 16

Запишем для этого случая законы сохранения импульса (47) и энергии (48) в векторном и скалярном видах.

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2'$$

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2' \qquad (47)$$

$$\frac{m_1\vec{V}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{V}_2^2}{2} = \frac{m_1\vec{V}_1'^2}{2} + \frac{m_2\vec{V}_2'^2}{2}$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1V_1'^2}{2} + \frac{m_2V_2'^2}{2} \qquad (48)$$

В законе сохранения энергии используется только кинетическая энергия. Потенциальная энергия постоянная и на плоскости движения шаров полагается равной нулю.

Преобразования показывают

$$V_1' = \frac{V_1(m_1 - m_2) + 2m_2V_2}{m_1 + m_2}$$

$$V_2' = \frac{V_2(m_2 - m_1) + 2m_1V_1}{m_1 + m_2}$$

Частные случаи:i

– ***шары с одинаковой массой*** m_1=m_2=m

$$V_1' = V_2$$

$$V_2' = V_1$$

Шары послу удара обмениваются скоростями

– ***масса одного тела значительно больше массы другого тела*** $m_2 \gg m_1$ (удар о массивную стенку)

$$V_1' = -V_1 + 2V_2$$

$$V_2' = V_2$$

так как V_2=0, то $V_1' = -V_1$ – шар отскакивает от стенки в противоположном направлении с той же скоростью.

2. *Абсолютно неупругий удар*

При таком ударе тела после взаимодействия слипаются и двигаются с общей скоростью (рисунок 17)

Рисунок 17

При этом происходит работа по деформации тел, равная изменению их энергии.

Тогда по закону сохранения импульса

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$$

$m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)V$

По закону сохранения энергии

$$\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)V^2}{2}+A_{ДЕФ}$$

Преобразования показывают, что энергия, затраченная на деформацию тел, равна

$$\Delta E=A_{ДЕФ}=\frac{m_1m_2(V_1-V_2)^2}{2(m_1+m_2)}$$

Частный случай: до удара одно тело неподвижно, например $V_2=0$.

$$\Delta E=A_{ДЕФ}=\frac{m_1m_2V_1^2}{2(m_1+m_2)}=E_k\,\frac{m_2}{m_1+m_2},$$

где $E_k=\frac{m_1V_1^2}{2}$ – кинетическая энергия первого тела.

Отсюда следует, что для получения большой энергии деформации тела (ковка, штамповка) масса неподвижного тела должна быть значительно больше, чем масса ударяемого тела. И, наоборот, для забивания сваи в грунт, гвоздя в дерево масса ударного механизма (копер, молоток) должна быть значительно больше, чем масса объекта, который забивается (свая, гвоздь).

Контрольные вопросы

1. Как найти работу переменной силы?
2. Что такое мощность? Единица измерения в СИ?
3. Дайте определение видов энергии
4. Чем обусловлено изменение потенциальной энергии
5. В чем заключается закон сохранения механической энергии
6. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?

1.7 Динамика твердого тела

Твердое тело полагается ***абсолютным,*** если оно не деформируется при любом движении и его материальные точки являются неподвижными и описывают окружности вокруг оси вращения. В природе все твердые тела деформируются, следовательно, абсолютно твердое тело это физическая модель, которая позволяет изучать движение твердого тела, пренебрегая его деформацией.

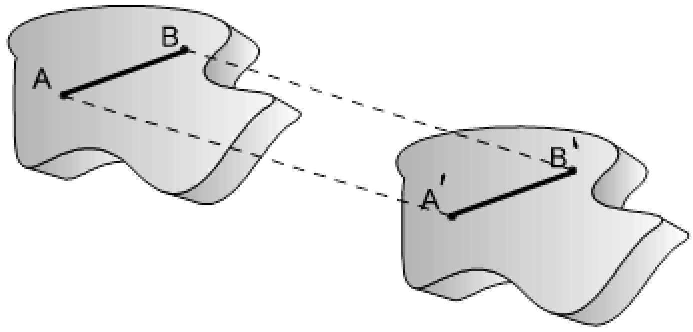


Рисунок 18

При ***поступательном движении*** абсолютно твердого тела любой отрезок, проведенный между двумя точками тела, перемещается параллельно самому себе (рисунок 18).

Для описания вращательного движения абсолютно твердого тела вводятся следующие характеристики.

1.7.1 *Момент инерции*

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси $O'O''$. При вращении тела точка ***A***, обладающая массой m описывает окружность радиусом *r* с центром в точке ***O***.

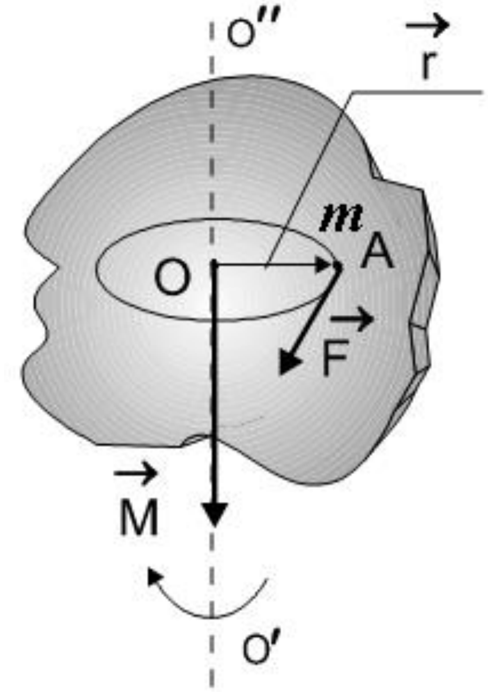


Рисунок 19 – Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси $O'O''$.

При вращательном движении мерой инертности тела является величина называемая ***моментом инерции***. Эта величина равна произведению массы тела на квадрат расстояния от этой точки до оси вращения

$$J = mr^2 \qquad (49)$$

Для вращающегося твердого тела суммируются все материальные точки этого тела, и момент инерции определяется выражением

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (50)$$

Если тело состоит из однородного материала и его материальные точки распределены равномерно, то в формуле используется интеграл по объему тела

$$J = \int r^2 dm \qquad (51)$$

Единица измерения момента инерции в СИ:
$[J]=[m][r]^2$=кг□м^2

Момент инерции твердого тела зависит от трех факторов: массы тела, формы тела и выбранной оси вращения. И определяется выше приведенными формулами (49) – (51). В качестве примера рассмотрим расчет для момента инерции однородного цилиндра, вращающегося вокруг центральной вертикальной оси (рисунок 20).

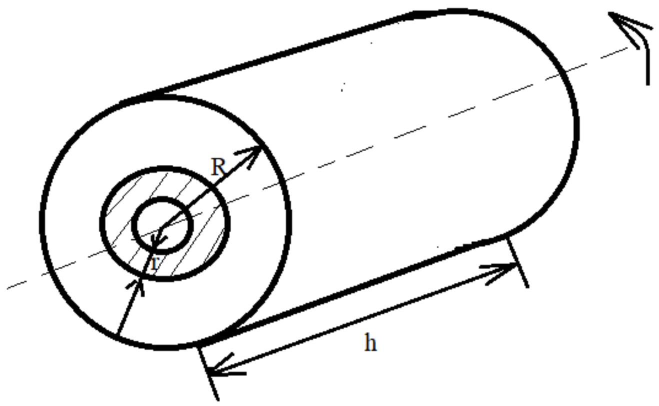


Рисунок 20 – Цилиндр, вращающегося вокруг центральной вертикальной оси

Для бесконечно малого вырезанного объема цилиндра момент инерции равен $dJ = r^2 dm$, где $dm = \rho dV = 2\pi\rho rhdr$, ρ – плотность тела.

Тогда

$$J = \int_0^R 2\pi\rho r^3 hdr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4$$

$$m = \rho V = \rho \pi R^2 h, \; h = \frac{m}{\pi \rho R^2}$$

$$J = \frac{1}{2} m R^2 \qquad (52)$$

Формула момента инерции цилиндра и диска одинаковы (52), т.к. диск представляет собой усеченный цилиндр.

Для примера на рисунке 21 представлены значения моментов инерции наиболее распространенных симметричных тел при их вращении вокруг центральной вертикальной оси.

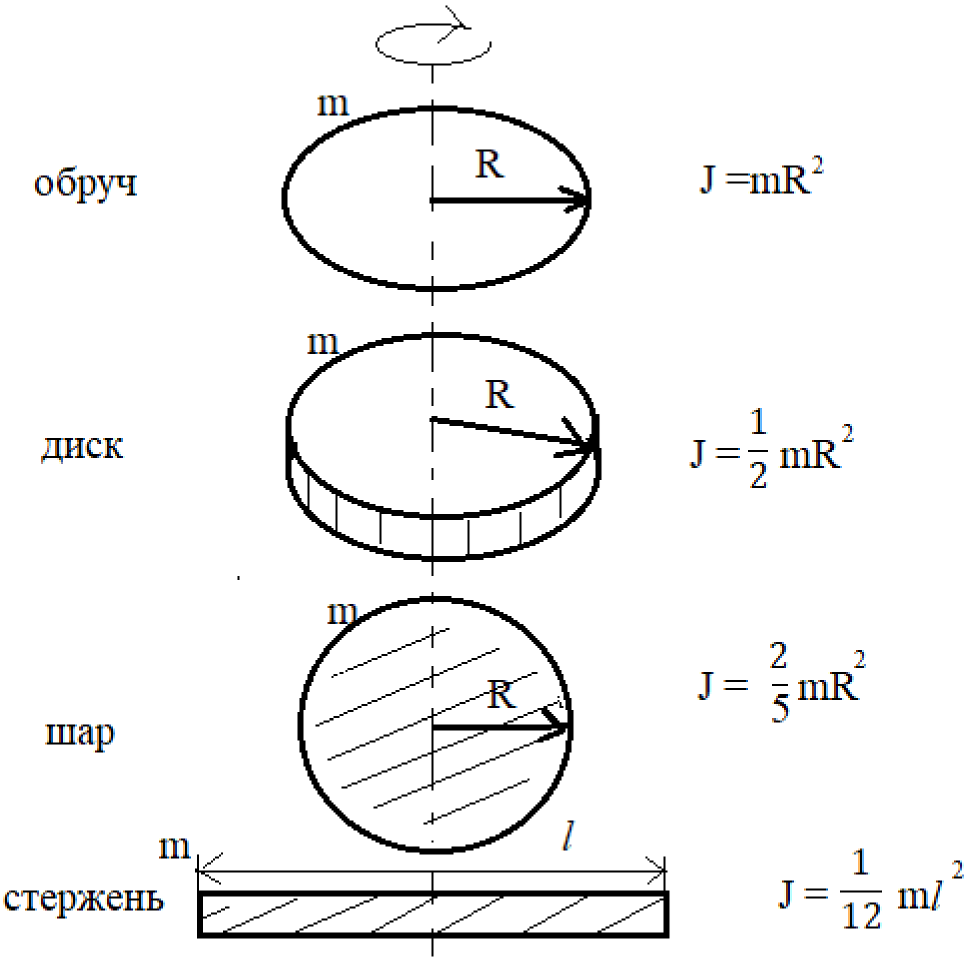


Рисунок 21

1.7.2 Момент силы (вращательный момент)

Точка ***A*** является точкой приложения силы $\vec{F}$, которая приводит тело во вращательное движение (рис. 19). Если провести радиус-вектор $\vec{r}$ от точки ***O*** к точке ***A***, то модуль этого радиуса-вектора (радиус вращения) будет является ***плечом силы*** $\vec{F}$. Плечом силы еще называют расстояние от данной точки (центра) до линии действия силы. ***Момент силы*** $\vec{M}$ относительно данной оси вращения это аксиальный вектор, направленный по оси вращения (по правилу Буравчика (правило правого винта) (рис. 19).

Момент силы равен

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right] \tag{53}$$

Модуль момента силы это произведение силы на ее плечо.

$$M = Fr \tag{54}$$

Единица измерения момента силы в СИ

[M]=[F][r]=Н$\cdot$м

1.7.3 Кинетическая энергия и работа при вращательном движении

Рассмотрим равномерное вращение абсолютно твердого тела вокруг вертикальной оси, проходящей через центр массы тела. В этом теле любая материальная точка описывает окружность определенного радиуса. Из кинематики вращательного движения известно, что она обладает угловой скоростью, которая равна $\omega = \frac{V}{r}$, где V-линейная скорость данной материальной точки, r – радиус ее вращения. Тогда кинетическая энергия при вращении этой точки равна

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2} \tag{55}$$

Суммируя все материальные точки в твёрдом теле, получим такую же по структуре формулу для всего вращающего твердого тела. Учитывая, что угловая скорость одинакова для всех точек тела, получим

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} J_i = \frac{J\omega^2}{2} \tag{56}$$

В случае одновременности двух видов движения поступательного и вращательного (колеса автомобиля при движении), то энергия определяется

$$E_k = E_{пост} + E_{вращ} = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \tag{57}$$

Вращаясь, твердое тело совершает работу. Найдем ее.

Пусть под действием силы $\vec{F}$ материальная точка прошла по траектории путь dS при угле поворота $d\varphi$. Тогда $dS = rd\varphi$ и работа при этом движении в данный момент времени равна $dA = FdS = Frd\varphi = Md\varphi$

Таким образом, работа при вращательном движении твердого тела определяется по формулам

$$dA = Md\varphi \Rightarrow A = \int Md\varphi \qquad (58)$$

1.7.4 Основное уравнение динамики вращательного движения

Работа при вращательном движении твердого тела идет на изменение его кинетической энергии: $dA{=}dE_k$.

Известно, что кинетичсекая энергия равна $E_k = \dfrac{J\omega^2}{2}$, а работа $dA = Md\varphi$.

Тогда

$$Md\varphi = d(\frac{J\omega^2}{2}) = \frac{2J\omega d\omega}{2} = J\omega d\omega \qquad (59)$$

Или

$$M\frac{d\varphi}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow M\omega = J\omega\varepsilon \Rightarrow M = J\omega \qquad (60)$$

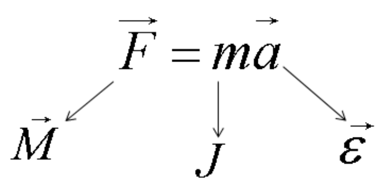
Таким образом, основной закон динамики вращательного движения имеет вид:

–***в скалярной форме*** $M = J\varepsilon$

–***в векторной форме*** $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$,

где M – вращательный момент, J – момент инерции, ε – угловое ускорение.

Данные формулы являются аналогом формулы *II закона Ньютона* для поступательного движения



1.7.5 Теорема Штейнера

Если тело вращается по оси, сдвинутой от центра массы на какое-то расстояние, то в формулу момента инерции надо вносить поправку.

Определим ее. Пусть произвольное твердое тело массой m вращается вокруг оси $A'A''$, которая находится на расстоянии d от оси $O'O''$, проходящей через центр массы тела C (рисунок 22).

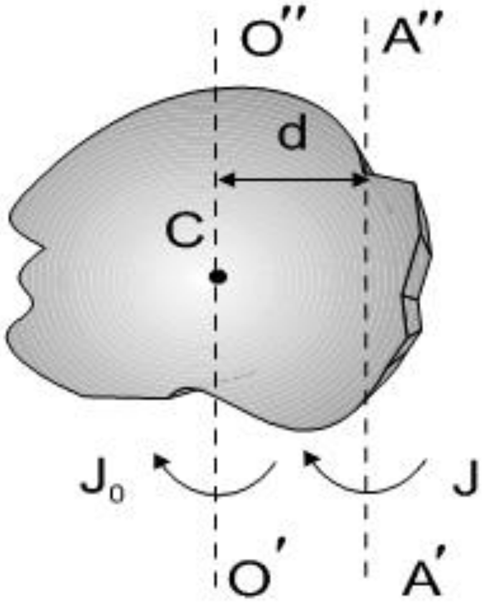


Рисунок 22

Такое вращение можно рассматривать, как сумму поступательного движения центра массы тела вокруг оси $O'O''$ и вращательного движения тела вокруг оси $A'A''$. Тогда кинетическая энергия такого вращения будет равна

$$E_k = \frac{1}{2}J_{A'A''}\omega^2 = \frac{1}{2}J_o\omega^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}J_o\omega^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 \Rightarrow J_0 + md^2 \qquad (61)$$

Следовательно можно записать следующее выражение

$$J = J_o + md^2 \qquad (62)$$

Данная формула (62) описывает ***теорему Штейнера***: момент инерции тела J при вращении его вокруг оси $A'A''$, не проходящей через центр массы тела равен сумме момента инерции этого тела J_0 относительно центрально-симметричной оси $O'O''$ и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими параллельными осями.

В качестве примера приведем расчет по теореме Штейнера вращения однородного стержня массой m и длиной l относительно его конца (рисунок 23).

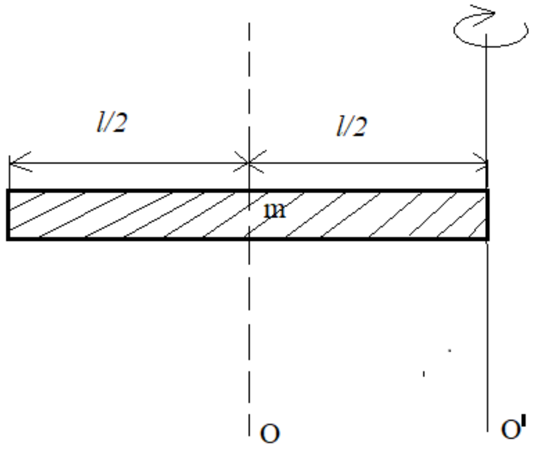


Рисунок 23 – Вращение однородного стержня

$$J_{o'} = J_o + md^2$$

$$J_{o'} = \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Видно, что в этом случае момент инерции будет иным, чем при вращении этого тела относительно его геометрического центра.

1.7.6 Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Как было определено ранее основной закон динамики вращательного движения имеет вид $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$, где M – вращательный момент, J – момент инерции, а угловое ускорение определяется $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Тогда $\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(J\vec{\omega})$. Или $\vec{M}dt = d(J\vec{\omega})$. В данной формуле векторная сумма моментов всех сил, действующих в изолированной системе равна нулю. Поэтому $d(J\vec{\omega}) = 0$. А дифференциал или производная в математике равны нулю, если они взяты от постоянной величины.

Тогда

$$J\vec{\omega} = const \tag{63}$$

Значение произведения $J\vec{\omega}$ называется ***моментом импульса*** $\vec{L}$, следовательно, ***момент импульса твердого тела*** - это вектор, являющийся произведением момента инерции тела на его угловую скорость.

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \tag{64}$$

Формула (63) представляет собой закон сохранения импульса: в изолированной системе векторная сумма моментов импульсов всех взаимодействующих тел не изменяется

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = const \tag{65}$$

Так как момент инерции определяется радиусом вращения, то, если в системе этот радиус увеличивается, то угловая скорость должна уменьшиться и наоборот. Этот закон используют фигуристы и балерины в элементах вращения и т.д.

Закон сохранения момента импульса демонстрируют с помощью скамьи Жуковского, которая состоит из платформы, вращающейся вокруг вертикальной оси. На платформе закреплена скамья, на которой сидит (либо стоит) человек, держащий в вытянутых руках гири (рисунок 24). Если человек опустит руки, то соответственно, уменьшится его момент инерции, следовательно, увеличится угловая скорость вращения.

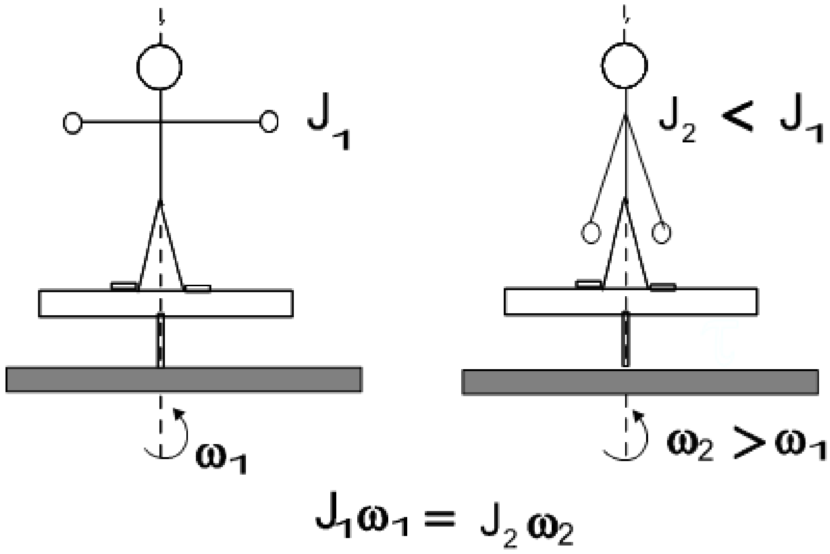


Рисунок 24

В авиации закон сохранения момента импульса играет весьма существенную роль. Так, например, чтобы предотвратить вращение вертолета в сторону, противоположную вращению винта, ставят дополнительный винт либо соосно с данным, либо на хвосте вертолета.

У самолета при изменении угловой скорости вращения винта изменяется его момент импульса. Это изменение должно быть компенсировано моментом аэродинамических сил, иначе самолет начнет вращаться в сторону, противоположную вращению винта.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции материальной точки и твердого тела?

2. Что такое вращающий момент?
3. От чего зависит момент инерции тела?
4. Что определяет теорема Штейнера? Рассчитать при помощи теоремы момент инерции шара массой m и радиуса R при его вращении около оси, проходящей: а) по касательной к поверхности шара, б) на расстоянии двух радиусов от поверхности шара
5. Дать понятие закона сохранения момента импульса и привести примеры его применения

Раздел II. ДИНАМИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Науки, изучающие движение жидкостей и газов, носят названия ***гидродинамика*** и ***аэродинамика***.

Хотя свойства жидкостей и газов во многом различны, во многих механических явлениях их поведение определяется одинаковыми параметрами и описывается одинаковыми уравнениями. Жидкости и газы при этом рассматриваются как сплошные среды, т.е. движения отдельных молекул не рассматриваются. Плотность жидкости мало зависит от давления, и поэтому в теории обычно используют модель ***несжимаемой жидкости***. Плотность газов существенно зависит от давления.

2.1 Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов

Давление это физ. величина, равная отношению силы, действующее на тело (нормальной силы, действующей со стороны жидкости или газа) к площади поверхности.

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S} \tag{66}$$

Единица измерения давления в СИ

$[P] = [F]/[S] = \text{Н/м}^2 = \text{Па}$ (Паскаль)

Закон Паскаля для жидкостей и газов: давление в газе или в жидкости передается одинаково по всем направлениям

Давления столба жидкости $P = \rho g h$ называется ***гидростатическим давлением.***

2.2. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли

В гидродинамике и аэродинамике используют несколько специальных терминов

– ***течение*** – движение жидкости (газов)

– ***поток*** – система частиц, движущейся жидкости (газа)

– ***линии тока*** – линии, касательные к которым совпадают по направлению с векторами скоростей частиц жидкости (газа) (рисунок 25)

– ***трубка тока*** – часть жидкости (газа), ограниченная линиями тока (рисунок 25)

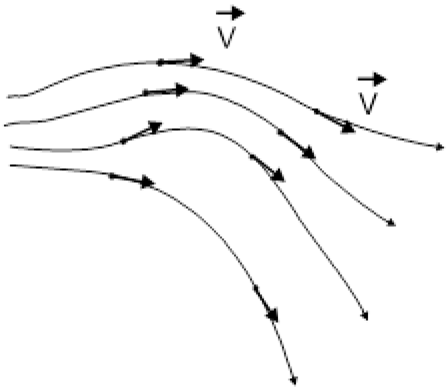


Рисунок 25

– стационарное течение – характер течения, когда вектор скорости в каждой точке остается постоянным

Рассмотрим трубку тока, изображенную на рисунке 26. S_1 и S_2 - сечения, перпендикулярные к направлению скорости. Через сечение S_1 за некоторое время Δt пройдет объем жидкости, равный $S_1V_1\Delta t$, через другое сечение - $S_2V_2\Delta t$. В случае несжимаемой мой жидкости эти объемы будут одинаковы и, следовательно,

$$S_1V_1 = S_2V_2 = const \tag{67}$$

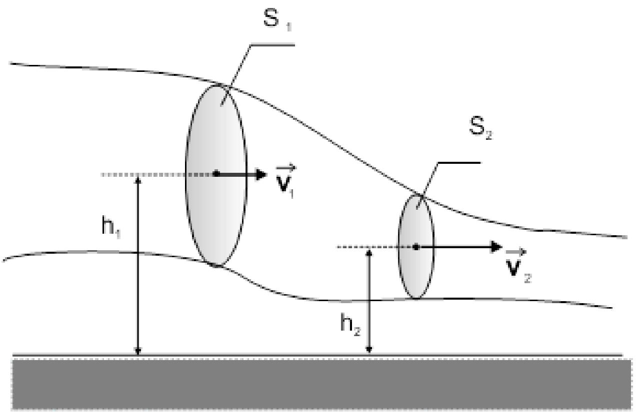


Рисунок 26 – Трубка тока

Неравенство (67) называют ***уравнением неразрывности***

Далее рассмотрим ***основное уравнение гидродинамики*** или ***Уравнение Бернулли.*** Пусть имеется стационарно текущая идеальная жидкость. Сечения S_1 и S_2. являются границами трубки тока. Сечения расположены на высотах h_1 и h_2. Давления в этих местах p_1 и p_2. Из закона сохранения энергии следует, что для такой жидкости:

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \tag{68}$$

В этом уравнении

– $\dfrac{\rho V^2}{2}$ – ***динамическое давление***

– ρgh – ***гидростатическое давление***

– p – ***статическое давление***

Уравнение Бернулли

$$\frac{\rho V^2}{2} + \rho gh + p = const \qquad (69)$$

Контрольные вопросы

1. Какую жидкость называют идеальной?
2. Чем ограничивается поверхность трубки тока?
3. Что называется давлением?
4. Каковы единицы измерения давления? Какая связь между этими единицами?
5. Сформулируйте закон Паскаля
6. Где применяется закон Паскаля?
7. Запишите математическую запись уравнения Бернулли

Раздел III. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Колебательное движение (колебания) происходит, когда система тел или одно тело многократно отклоняясь от положения равновесия, вновь возвращается к нему. В практике периодические колебания разделяют на три типа колебаний: свободные, затухающие и вынужденные. При свободных колебаниях не учитывается сила сопротивления (сила трения и т.п.) и такие колебания происходят бесконечно долго. При затухающих колебаниях учитывается сила сопротивления и через какое-то время они прекращаются. Вынужденные колебания из-за влияния сил сопротивления для своего непрекращающегося колебания требуют дополнения энергии, и для этого используется внешняя сила, которая называется вынужденной. Большинство колебаний в технике происходят периодически по гармоническим законам, и именно такие колебания будем рассматривать.

3.1 Свободные гармонические колебания. Основные характеристики колебательного движения

Гармонические колебания происходят по закону синуса или косинуса угла. Установим их характер. Примером таких колебаний является колебание тени на экране при равномерном вращении по окружности шарика на нити. Данная система освещена параллельным пучком света (рисунок 27).

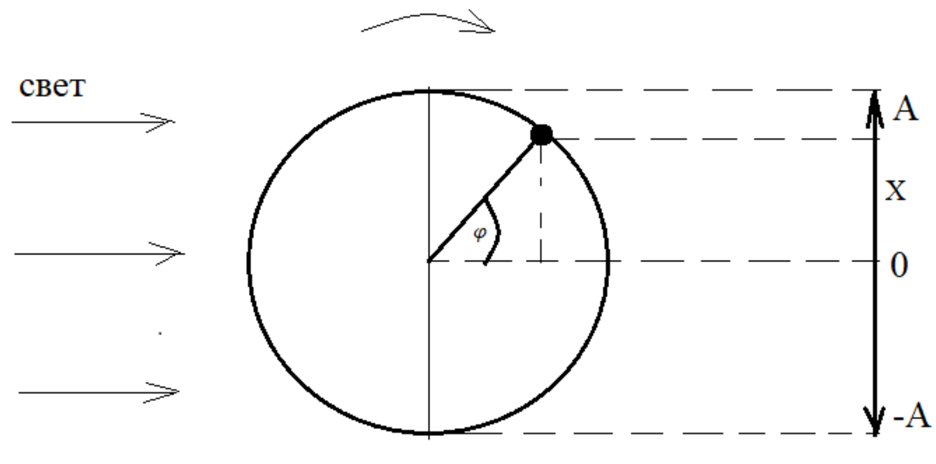


Рисунок 27

Из рисунка видно, что габариты колебания тени от шарика на экране от положения равновесия ***0*** составляют амплитуды ***А*** и ***–А.*** Координата тени в данный момент времени равна *X*. Тогда согласно законам тригонометрии

$$X = A\sin\varphi = A\sin\omega t$$

или в общем виде

$$X = A\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{70}$$

Характеристиками колебательного движения являются:

X – смещение – отклонение тела от положения равновесия в данный момент времени (единица измерения в СИ: м)

A – амплитуда – максимальное смещение тела от положения равновесия (единица измерения в СИ: м (метр))

ω - циклическая (угловая) частота – число колебаний за цикл 2π -секунд

$\omega t = \varphi$ - фаза – угол отклонения тела от положения равновесия в данный момент времени

φ_0 -начальная фаза – угол отклонения тела от положения равновесия в начальный момент времени.

Кроме того, существуют еще две характеристики колебательного движения:

T –период колебания – время одного полного колебания (единица измерения в СИ: с (секунда))

ν (ню) или другое обозначение *n* – частота колебаний – число колебаний за 1 секунду (единица измерения в СИ: Гц (Герц) или $с^{-1}$)

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ и } \omega = 2\pi\nu \tag{71}$$

График смещения будет иметь вид (рисунок 28)

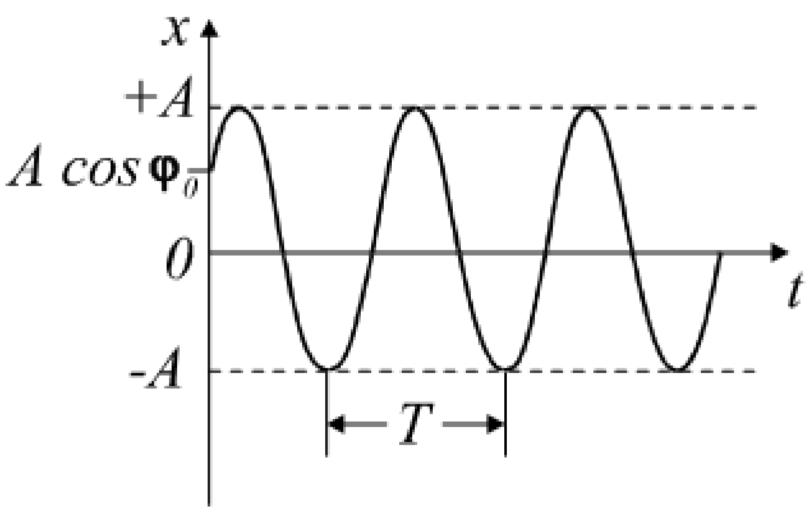


Рисунок 28 – График колебательного процесса

3.2 Скорость и ускорение гармонических колебаний

Как известно, скорость любого движения – это производная перемещения по времени, а ускорение – производная скорости по времени, или вторая производная перемещения по времени. Тогда

$$V = \frac{dX}{dt} = \frac{d(A\sin\omega t)}{dt}(A\sin\omega t)' = A\omega\cos\omega t \qquad (72)$$

Или

$$V = A\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (73)$$

На (рисунке 29б) показан график скорости гармонических колебаний.
Теперь определим зависимость от времени ускорения

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d(A\omega\cos\omega t)}{dt}(A\omega\cos\omega t)' = -A\omega^2\sin\omega t \qquad (74)$$

Или

$$a = A\omega^2\sin(\omega t + \pi) \qquad (75)$$

На (рисунке 29в) показан график ускорения гармонических колебаний.
Из (рисунка 29) и формул (70), (73) , (75) следует:

1. Смещение, скорость и ускорение свободных гармонических колебаний имеют одинаковый период и частоту и изменяются по гармоническому закону.
2. Амплитуды у этих колебаний различны: у смещения – *A*, у скорости – $A\omega$, у ускорения – $A\omega^2$
3. Фазы этих колебаний также различны и отличаются друг от друга на угол $\frac{\pi}{2}$

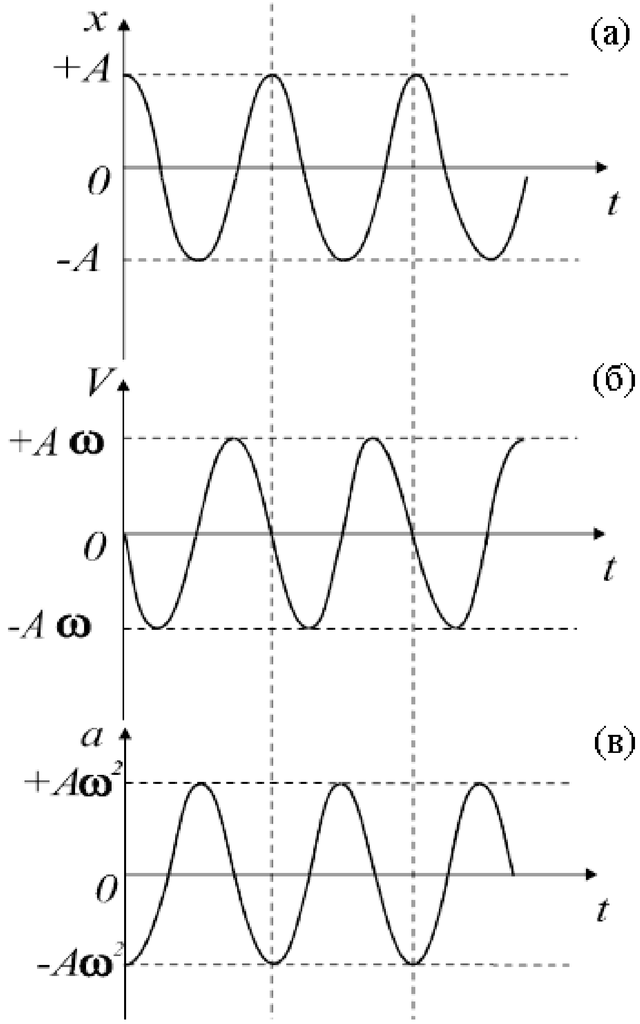


Рисунок 29

3.3 Упругие и квазиупругие силы. Возвращающая сила. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Колебания любых механических систем возникают под действием сил, которые могут быть упругими либо иными, которые называются как бы упругими (в переводе – квазиупругими). Установим их значение.

При любом движении действует II закон Ньютона $F = ma = m\frac{dV}{dt}$, где ускорение гармонических колебаний равно $a = -A\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 X$.

В пружинном маятнике возникает сила упругости. Поэтому сила упругости, также как и квазиупругая сила, при колебаниях описываются формулой $F_{упр} = F_{кз} = -m\omega^2 X$, где m – масса тела, ω – циклическая частота колебаний, X –смещение тела от положения равновесия в данный момент времени. Знак минус показывает, что эти силы направлены в сторону, противоположную смещению тела. Поэтому упругие и квазиупругие силы при колебаниях тел считают возвращающими и их формула записывается в виде

$$F_в = -m\omega^2 X$$

обозначив $m\omega^2 = k$, получим

$$F_в = -kX$$

Получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Используя второй закон Ньютона и возвращающую силу, запишем равенство

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX$$

Далее поделим обе части данного уравнения на массу *m*

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{k}{m}X = 0$$

Пусть $\frac{k}{m} = \omega^2$ - коэффициент квазиупругой силы (циклическая частота), тогда

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2 X = 0 \qquad (76)$$

Формула (76) – дифференциальное уравнение второго порядка – дифференциальное уравнение гармонических колебаний Его решением является гармонический закон

$$X = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

3.4 Энергия гармонических колебаний

Чтобы определить кинетическую энергию колеблющейся материальной точки, необходимо в выражение для кинетической энергии подставить выражение скорости гармонических колебаний, при $\varphi_0 = 0$ получим:

$$E_к = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (77)$$

Используя тригонометрическое соотношение

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad (78)$$

получим:

$$E_к = \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left[1+\cos\left(2\omega t + \pi\right)\right] \qquad (79)$$

Из выражения (79) видно, что кинетическая энергия меняется со временем по гармоническому закону с удвоенной частотой.

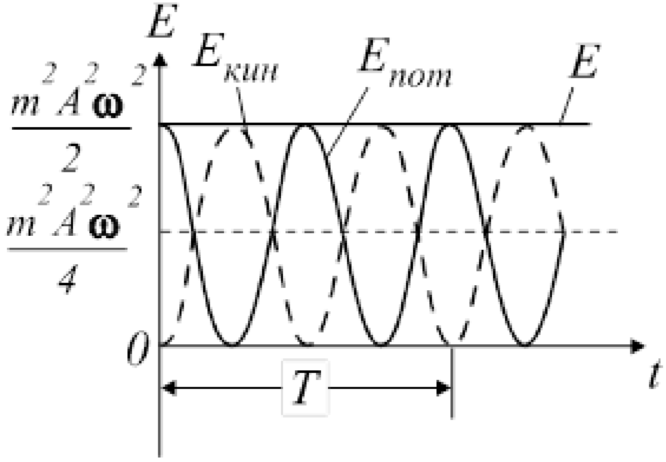


Рисунок 30 – Энергия гармонических колебаний

Кинетическая энергия показана пунктирной линией на рисунке 30. Кинетическая энергия два раза за один период равна нулю, поэтому происходит удвоение частоты. Кроме того, два раза за период кинетическая энергия максимальна.

Потенциальная энергия колеблющейся точки находящейся под действием упругой силы равна $E_n = \frac{kx^2}{2}$.

Тогда потенциальная энергия гармонических колебаний

$$E_n = \frac{kA^2 \cos^2 \omega t}{2} \tag{80}$$

Учитывая, что коэффициент квазиупругой силы $k = m\omega^2$ и используя соотношение (78) получим:

$$E_n = \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left[1 + \cos 2\omega t\right] \tag{81}$$

Следовательно, потенциальная энергия меняется в тех же пределах и с той же частотой, что и кинетическая, но со сдвигом фазы на π. На рис.30 сплошной линией изображена зависимость потенциальной энергии от времени.

Полная энергия гармонических колебаний равна сумме кинетической и потенциальных энергий.

$$E_{кин} = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}\left(-A\omega \sin \omega t\right)^2 = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2 \omega t$$

$$E_{пот} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2 \omega t;$$

$$E = E_{кин} + E_{пот} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t\right) = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

После вычислений получим выражение для полной энергии гармонических колебаний:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} \quad (82)$$

Из выражения (82) следует, величина полной энергии гармонических колебаний пропорциональна квадрату амплитуды колебаний и является постоянной величиной для данной системы, что соответствует закону сохранения энергии для изолированной системы. Графически это можно выразить рисунком 30 прямая линия.

3.5 Простейшие механические колебательные системы

3.5.1 Пружинный маятник

В технике существует много устройств, совершающих периодические колебания около положения равновесия под действием силы упругости (пружины, рессоры и т.д.). Такие устройства подчиняются закону колебания пружинного маятника (рисунок 31). Определим период колебания такого маятника.

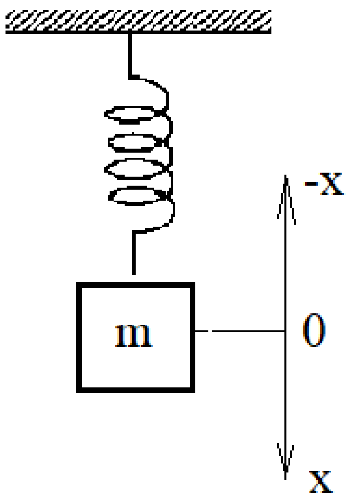


Рисунок 31 – Пружинный маятник

В данном случае возвращающей силой является сила упругости, которая согласно закону Гука равна $F_{упр} = -KX$. С другой стороны, эта сила упругости является возвращающей силой и равна $F_в = -m\omega^2 X$. Объединяя правые части этих формул, получаем

$$-KX = -m\omega^2 X$$

$$K = m\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$\omega = \sqrt{K / m}$$

Период колебания $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Тогда период колебания пружинного маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{m / K} \tag{83}$$

Следовательно, период колебания не зависит от амплитуды колебания, а зависит от массы тела и его материала.

3.5.2 Физический маятник

Физическим маятником называется тяжелое тело произвольной геометрической формы, которое совершает колебания около оси, не совпадающей с центром массы тела. Например, тело, изображенное на рисунке 32.

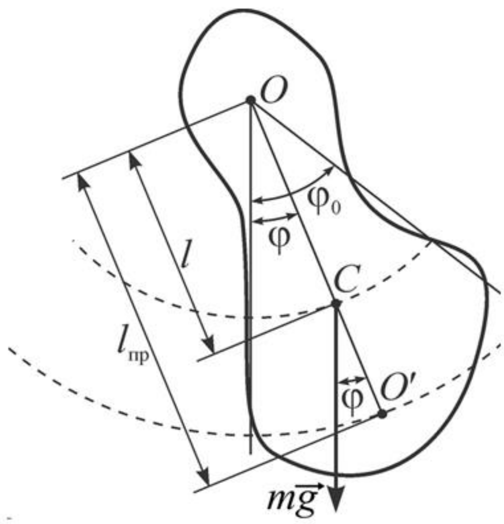


Рисунок 32 – Физический маятник

Это тело колеблется около оси *O*, а его центр тяжести расположен в точке *C*, находящейся на расстоянии *l* от оси колебания. Масс тела *m*. Если в данный момент времени тело отклонено от положения равновесия на угол φ, то в точке *C* возвращающая сила будет квазиупругой и представлять собой геометрическую сумму векторов силы тяжести и силы упругости. И эта возвращающая сила направлена по касательной к траектории смещения тела *X*.

При этом возникает момент силы (вращающий момент), который в данном случае равен $M = -F_T l \sin\varphi = -mgl\sin\varphi = -mgl\varphi$ (при малых углах отклонения)

С другой стороны, По основному закону динамики вращательного движения абсолютно твердого тела следует, что вращательный момент описывается формулой $M = J\varepsilon$, где J -момент инерции тела, а ε -его угловое ускорение. Угловое ускорение связано с линейным а формулой $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, где в нашем случае $R = l$. И поэтому $\varepsilon = \dfrac{a}{l}$. И тогда $M = J\dfrac{a}{l}$. А так как при гармонических колебаниях $a = -\omega^2 X$, то $M = -J\dfrac{m\omega^2}{l}$.

Объединяя правые части выражений вращающего момента, получаем $-mgl\varphi = -J\dfrac{\omega^2 X}{l}$, где из геометрических соображений и из приведенного рисунка $X = \dfrac{\varphi}{l}$. Тогда $-mgl\varphi = -J\dfrac{\omega^2 X}{l} = -mgl\varphi = -J\dfrac{\omega^2\varphi}{l^2}$ или $mgl = J\omega^2$, $\omega^2 = \dfrac{mgl}{J}$.

Тогда $\omega = \sqrt{mgj / J}$ и период колебания физического маятника равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ или } T = 2\pi\sqrt{J / mgl} \qquad (84)$$

Следовательно, период колебания не зависит от амплитуды колебания, а зависит от массы тела и его геометрической формы.

3.5.3 Математический маятник

Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на достаточно длинной нерастяжимой нити (рисунок 33).

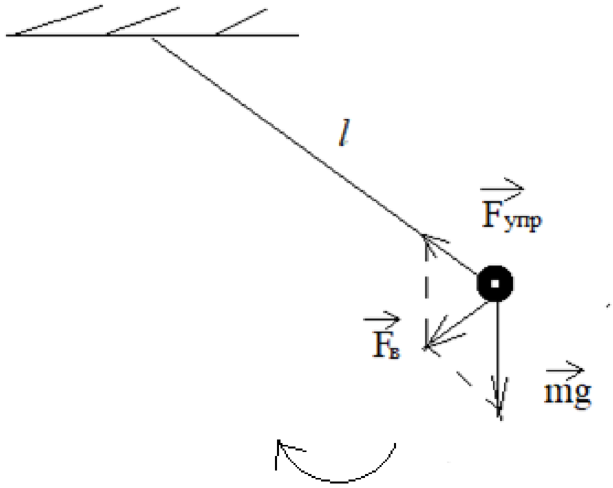


Рисунок 33 – Математический маятник

Материальная точка имеет момент инерции $J = mr^2 = ml^2$ и, подставляя это выражение в формулу периода колебания физического маятника, получаем

$$T = 2\pi\sqrt{l / g} \tag{85}$$

Следовательно, период колебания не зависит от амплитуды колебания, а зависит от длины нити.

Таким образом, период колебания любого маятника не зависит от амплитуды колебания системы.

3.6 Сложение гармонических колебаний

В определенных случаях тело может участвовать в нескольких колебаниях. Например, пружинный маятник находится на корабле и испытывает колебания не только под действием груза, но и под действием волн совершает колебания с учетом движения этих волн. В таких случаях необходимо складывать колебания по определенным плоскостям. Рассмотрим наиболее характерные случаи в практике для двух колебаний.

3.6.1 Сложение колебаний одного направления

а) Частоты и фазы колебаний одинаковы, амплитуды различны

Сложим два гармонических колебания:

$$X_1 = A_1 \sin \omega t$$

$$X_2 = A_2 \sin \omega t$$

$$X = X_1 + X_2 = (A_1 + A_2)\sin \omega t = As\text{in}\, \omega t \tag{86}$$

Возникают колебания такого же направления с амплитудой, равной сумме начальных амплитуд.

б) Амплитуды одинаковы, частоты близки по значению друг к другу ($\omega_1 \approx \omega_2; \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$)

$$X_1 = A\sin\omega_1 t$$
$$X_2 = A\sin\omega_2 t$$
$$X = X_1 + X_2 = 2A\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \qquad (87)$$

Возникает сложное колебание с медленно изменяющимся периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ (косинусоидальная часть функции) и колебания с изменяющейся амплитудой и малым периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ (синусоидальная часть функции). На рисунке 34 график этих колебаний.

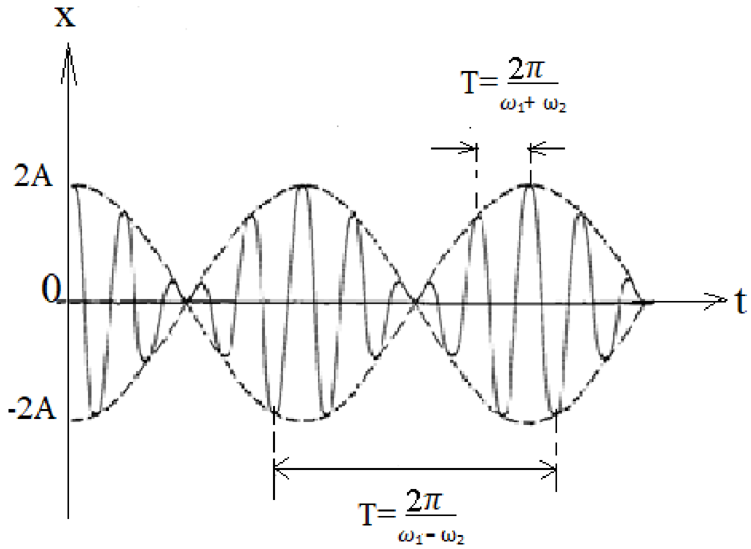


Рисунок 34

Такие колебания называются *биениями*. Именно с биениями связан звук, возникающий в камертоне при настройки музыкальных инструментов, т.к. звуковые волны непосредственно связаны с частотой и другими характеристиками гармонических колебаний.

3.6.2 Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний

а) Амплитуды различны, частоты одинаковы, φ_0 = 0.

$$X = A_1\sin\omega t$$
$$Y = A_2\sin\omega t$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow Y = \frac{A_2}{A_1} X = \frac{B}{A} X \qquad (88)$$

Выражение (88) – уравнение прямой. Это уравнение прямой, проходящей через первую и третью четверти (рисунок 35 а). Расстояние от начала координат до колеблющейся точки:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t} = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos \omega t$$

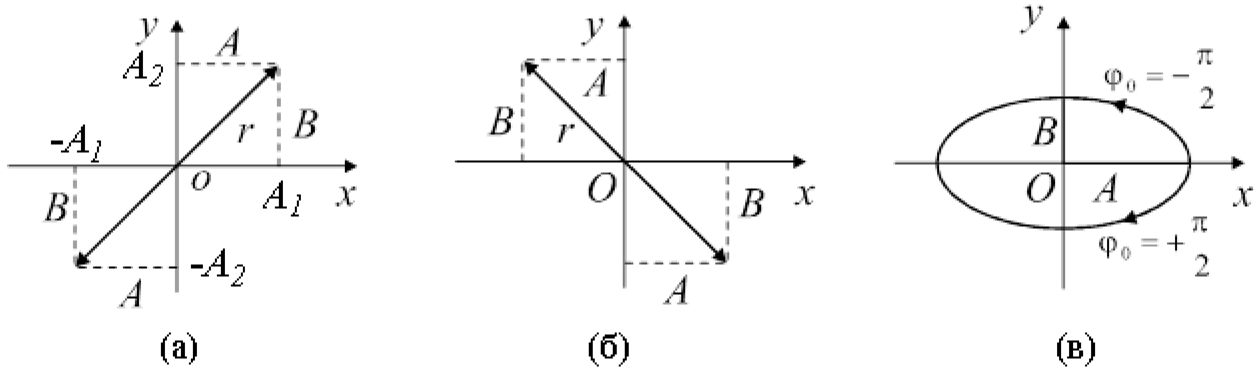


Рисунок 35

б) Амплитуды различны, частоты одинаковы, $\varphi_0 = \pm\pi$.

$$Y = -\frac{A_2}{A_1} X = -\frac{B}{A} X \qquad (89)$$

Уравнение (89) отличается от уравнения (88) только знаком. Следовательно прямая будет проходить через вторую и четвертую четверть (риснок 35 б).

в) Амплитуды различны, частоты одинаковы, фазы отличаются на угол $\frac{\pi}{2}$

$$X = A_1 \sin \omega t$$

$$Y = A_2 \cos \omega t$$

$$\frac{X}{A_1} = \sin \omega t$$

$$(\frac{X}{A_1})^2 = \sin^2 \omega t$$

$$\frac{Y}{A_2} = \cos \omega t$$

$$(\frac{Y}{A_2})^2 = \cos^2 \omega t$$

$$\left(\frac{X}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{Y}{A_2}\right)^2 = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

$$\left(\frac{X}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{Y}{A_2}\right)^2 = 1 \tag{90}$$

Выражение (90) – уравнение эллипса (рисунок 35 в)

Если амплитуды будут равны, то эллипс превратится в окружность.

Если частоты складывающихся взаимно перпендикулярных колебаний *неодинаковы*, то траектория результирующего движения имеет весьма сложный вид. Когда отношение частот складывающихся колебаний равно отношению целых чисел

$$\omega_1 : \omega_2 = m : n,$$

траектория имеет вид замкнутой кривой, которая касается осей x и y m и n раз. Эти сложные кривые называют ***фигурами Лиссажу*** (рисунок 36).

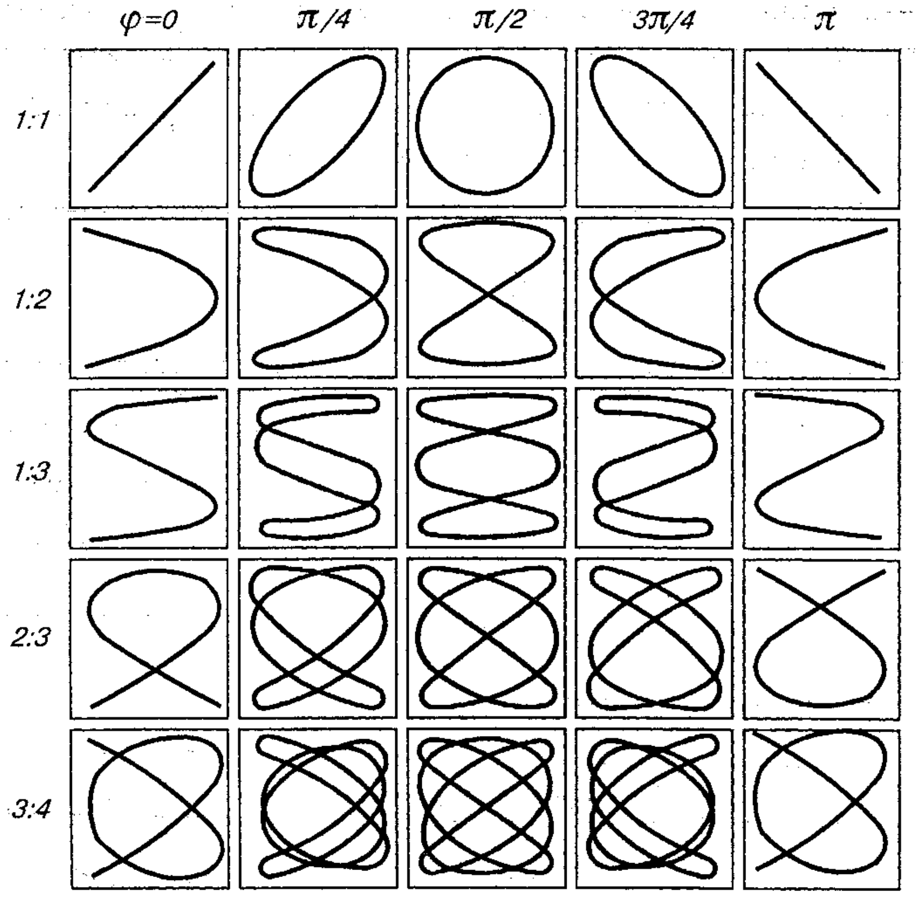


Рисунок 36 – Фигуры Лиссажу

3.7 Затухающие колебания

На практике все колебания не являются свободными и испытывают влияние различных сил сопротивления (трения, сопротивления воздуха и других сред и тому подобное). Со временем амплитуда таких колебаний уменьшается и через какое-то время колебания прекратятся. Такие колебания называются ***затухающими***. Установим их закон.

Любое движение, в том числе колебательное, подчиняется II закону Ньютона, математическая запись которого $\sum F = ma$, где $\sum F$ это сумма всех сил, действующих на систему с массой m и ускорением a. При затухающих колебаний на систему действуют два силы: упругости (или квазиупругая) сила и сила сопротивления, которая включает в себя все виды трения и сопротивления воздуха. Сила упругости подчиняется закону Гука, а сила сопротивления при обычных скоростях колебаний прямо пропорциональна скорости движения. Математически это можно записать как

$$\sum F = F_{упр} + F_c = ma$$

Сила упругости: $F_{упр} = -KX$. Сила сопротивления: $F_c = -rV$, где r – коэффициент сопротивления, V – скорость колебания.

Тогда $-KX - rV = ma \Rightarrow ma + KX + rV = 0$, разделим обе части неравенства на массу m, получим

$$a + \frac{r}{m}V + \frac{K}{m}X = 0$$

Пологая, что $\delta = \frac{r}{2m}$ – ***коэффициент затухания*** и $\omega = \sqrt{K/m}$ для силы упругости, можно записать

$$a + 2\delta V + \omega^2 X = 0$$

Так как ускорение-вторая производная смещения по времени, а скорость-первая производная, то это выражение имеет вид

$$X' + 2\delta X' + \omega^2 X = 0 \tag{91}$$

Данное выражение представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка и имеет решение в виде

$$X = A_0 e^{-\delta t} \sin \omega t, \tag{92}$$

где A_0-начальная амплитуда колебаний, $\omega = \sqrt{(K/m)^2 - (r/2m)^2} = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$, ω_0 -частота свободных колебаний (собственная частота), ω-частота затухающих колебаний.

В данном решении амплитуда затухающих колебаний является зависимой от времени по убывающему экспоненциальному закону $A(t) = \mathrm{A}_0 e^{-\delta t}$ и на рисунке 37 изображена как огибающая к графику убывающих гармоник затухающих колебаний.

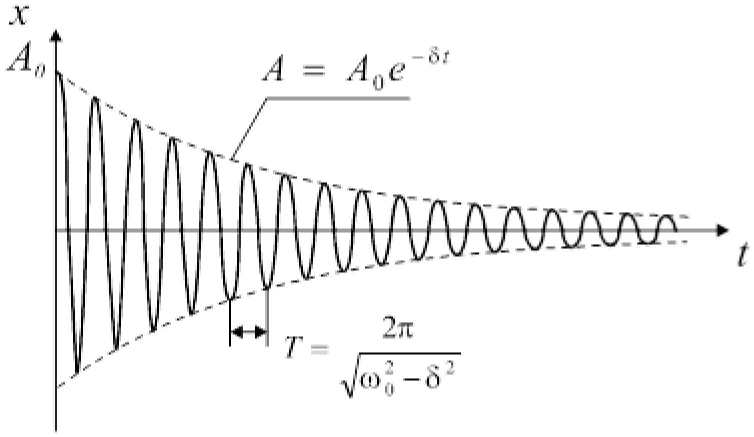


Рисунок 37

Для характеристики затухающих колебаний используется понятие логарифмического декремента. ***Логарифмический декремент*** это отношение натуральных логарифмов предыдущей и последующей амплитуд колебаний. То есть отличающихся на один период колебаний.

$$\Theta(\text{тэта}) = \ln\frac{A_t}{A_{t+T}} = \ln\frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T \tag{93}$$

$$\Theta = \delta T \Rightarrow \delta = \frac{\Theta}{T} \tag{94}$$

Естественно, что для свободных колебаний эти коэффициенты равны нулю.

3.8 Вынужденные колебания. Резонанс

В практике для того, чтобы колебания не прекращались надо пополнять потери энергии системы, надо использовать внешние силы с той же фазой колебаний. То есть внешние гармонические колебания. Например, в такт подталкивать рукой маятник, подзаводить механические часы и т.п. Таким образом, возникнут вынужденные незатухающие колебания, при которых будут действовать на систему три силы: упругости, сопротивления и внешняя гармоническая. Математически по аналогии с предыдущей темой можно записать

$$\sum F = F_{упр} + F_c + F_в = ma \tag{95}$$

$F_{упр} = -KX$, $F_c = -rV$, $F_в = F_0 \sin\omega_в t$, где $F_в$ – внешняя вынужденная сила с амплитудой F_0 и частотой $\omega_в$.

Тогда уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$X'' + 2\delta X'' + \omega^2 X = \frac{F_0}{m}\sin\omega_в t = f_0 \sin\omega_в t, \tag{96}$$

где f_0-удельная амплитуда вынужденной силы и $\omega = \omega_0$-частота собственных колебаний.

Данное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Такие уравнения имеют множество решений в зависимости от выбранных граничных и начальных условий. Во всех этих решениях амплитуда вынужденных колебаний равна

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_в^2) + 4\delta^2\omega_в^2}} \tag{97}$$

Отсюда следует, что $A \sim \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_в^2}$. Значит, если $\omega_0 = \omega_в$, то $A \to \infty$

Это условие характеризует явление ***резонанса,*** при котором возникает резкое возрастание амплитуды колебаний, когда совпадают по своим значениям частоты собственных и вынужденных колебаний. Графически это явление показывает резонансная кривая, изображенная на рисунке 38.

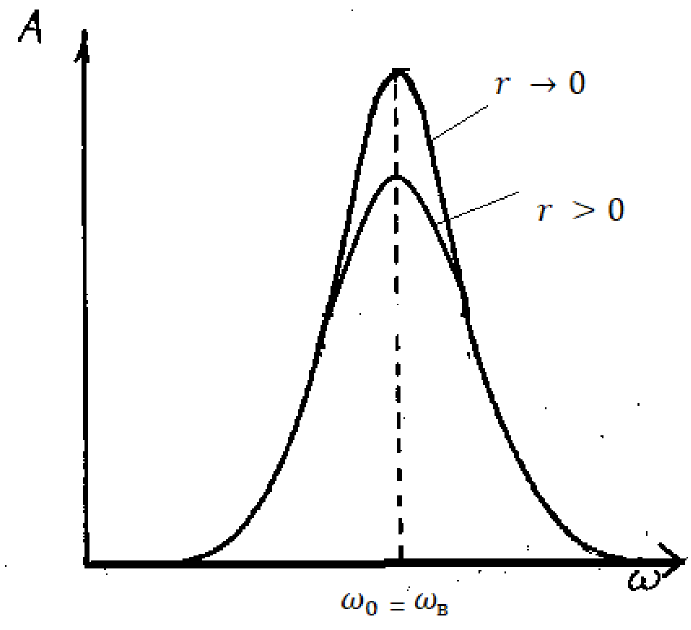


Рисунок 38 – Явление резонанса

Видно, чем меньше коэффициент сопротивления *r*, тем выше пик кривой, который может стремиться к бесконечности при нулевом сопротивлении.

Резонанс может быть полезным и вредным явлением. Например, настройка на звук и изображение теле- и радиоприемников происходит благодаря резонансу, когда частота колебания контура в устройстве совпадает с частотой сигнала передающей станции. И, наоборот, при строительстве нужно исключать равенство частот колебания устройства и фундамента, что может привести к разрушению.

Контрольные вопросы

1. Какие типы колебаний существуют в природе, и какие колебания являются гармоническими?
2. Дать понятие, что такое смещение, амплитуда, период, частота, фаза колебаний
3. Выразить из формулы гармонического колебания $x=2\sin 4t$ значения амплитуды, циклической частоты, фазы и периода колебания
4. Если смещение гармонического колебания определяется формулой $x=4\sin 5t$ (м), то как выразить скорость и ускорение этого колебания?
5. Дать понятие возвращающей силы и ее видов

Раздел IV. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ

Законы классической механики позволяют решить много задач в практике и технике, описать много явлений в природе, но на ряд вопросов они не могут ответить. Например, при переходе механической энергии в тепловую при неупругом ударе или столкновений тел и т.п. Большой ряд задач требует рассмотрение внутреннего строения тела, наличие в нем молекул и атомов, введение тепловых характеристик вещества. На эти вопросы отвечает раздел физики «Молекулярная физика и термодинамика». Он включает в себя два подхода. С одной стороны, описывается состояние вещества при физических законах с учетом его молекулярного строения. С другой стороны, в ряде явлений не учитывается его внутреннее строение, а используются энергетические характеристики, переход энергии из одной формы в другую. Эти направления не противоречат друг другу, а дополняют рассмотрение физических законов и поэтому молекулярно-кинетический и термодинамический подходы объединяются в один раздел физики.

Приступим к рассмотрению основных законов молекулярной физики и термодинамики, используя тот или иной подход.

4.1 Идеальный газ. Основные газовые законы

Будем полагать, что газ находится при обычных условиях, т.е. при не экстремальных давлениях и температурах. Такой газ в физике называется ***идеальным*** и у него расстояние между молекулами достаточно велико, поэтому он легко сжимаем и его молекулы и другие частицы можно считать материальными точками, не имеющими размеров и объема. Обычный воздух, который нас окружает, обладает такими свойствами.

Основными термодинамическими параметрами (параметрами состояния) газов являются давление (P), объем (V) и температура (T). Существует уравнение, которое связывает эти параметры. Уравнение состояния, полученное французским физиком Клайпероном в общем виде записывается так:

$$f(P,V,T)=0 \qquad (98)$$

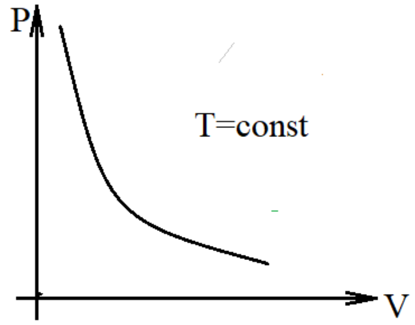
Для идеального газа на основе эксперимента были получены основные его законы.

4.1.1 *Изотермический процесс (закон Бойля-Мариотта)*

Этот процесс осуществляется, когда постоянным параметром является температура газа – T = *const*, а переменными являются давление и объем газа. (Приставка «изо» в переводе означает «постоянный», «термо» - температура).

Закон гласит: для данной массы газа при постоянной температуре давление газа уменьшается обратно пропорционально его объему.

График этого закона в координатах P-V изображен на рисунке.



Математически этот закон записывается

PV=*const*, при постоянной массе газа и его температуре.

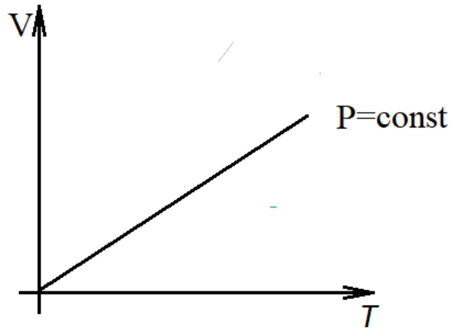
Постоянная – *const* зависит от сорта газа.

4.1.2 *Изобарный (изобарический) процесс (закон Гей-Люссака)*

Этот процесс осуществляется, когда постоянным является давление газа – P=*const*, а переменными являются температура и объем газа. («Бара» в переводе означает «давление»).

Закон гласит: для данной массы газа при постоянном давлении объем газа увеличивается прямо пропорционально его температуре.

График этого закона в координатах V-T показан на рисунке.



Математически этот закон имеет вид

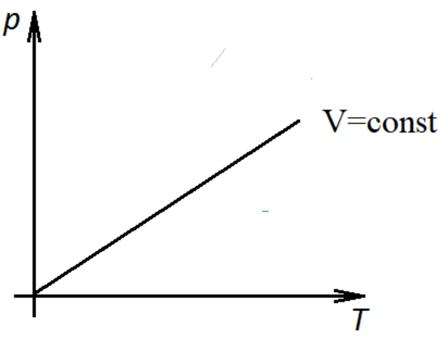
$$\frac{V}{T} = const \text{, при постоянной массе газа и его давлении}$$

4.1.3 Изохорный (изохорический) процесс (закон Шарля)

Этот процесс осуществляется, когда постоянным является объем газа – $V = const$, а переменными являются температура и давление газа. («Хора» в переводе означает «объем»).

Закон гласит: для данной массы газа при постоянном объеме давление газа увеличивается прямо пропорционально его температуре.

График этого закона в координатах *P-T* представлен на рисунке.



Математически этот закон имеет вид

$$\frac{P}{T} = const\text{, при постоянной массе газа и его объеме}$$

4.1.4 Закон Авогадро

Закон гласит: при одинаковых температурах и давлениях моли любых газов занимают одинаковые объемы.

Для пояснения этого закона надо ввести некоторые понятия.

Моль – это такое количество вещества, в котором находятся столько частиц, сколько их имеется в 0,012 кг углерода. Это является стандартом. В одном моле содержится $6 \cdot 10^{23}$ частиц. Это число называется числом (постоянной) Авогадро.

Тогда, используя таблицу периодических элементов Менделеева, можно определить, что 1 моль – это и 18 г воды, и 32 г кислорода, и 195 г платины, и т.д. Значит, в этих массах разных веществ находится одинаковое число частиц – ***постоянная Авогадро*** – $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

В физике и химии существует понятие нормальных условий (н.у.). Принято при н.у. температуру газа считать равной 273 К (по шкале Кельвина) и давление газа – нормальное атмосферное давление $1{,}013 \cdot 10^5$ Па (Паскаля). Поэтому по закону Авогадро можно найти объем любого газа при этих условиях. Это число равно молярным объемом газа при н.у. и равно 22,4 л/моль$=22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль.

Выше приведенные константы и понятия используются во многих расчетах молекулярной физики. При этом мельчайшие частицы вещества не определяются конкретно, а считаются просто частицами.

4.2 Свойства идеального газа. Уравнение состояния идеального газа

Идеальный газ обладает следующими свойствами:

- ✓ входящие в него частицы считаются материальными точками, не имеющими ни размеров, ни объема,
- ✓ энергия идеального газа определяется суммой кинетических энергий всех частиц, потенциальная энергия частиц пренебрежимо мала,
- ✓ частицы газа совершают броуновское (хаотическое) движение, равновероятное во все направления.

Уравнением состояния такого газа является функция от трех основных переменных параметров газа: давления, объема и температуры

$$f(P,V,T)=0$$

Установим ее вид при помощи графика, изображенного на рисунке 39.

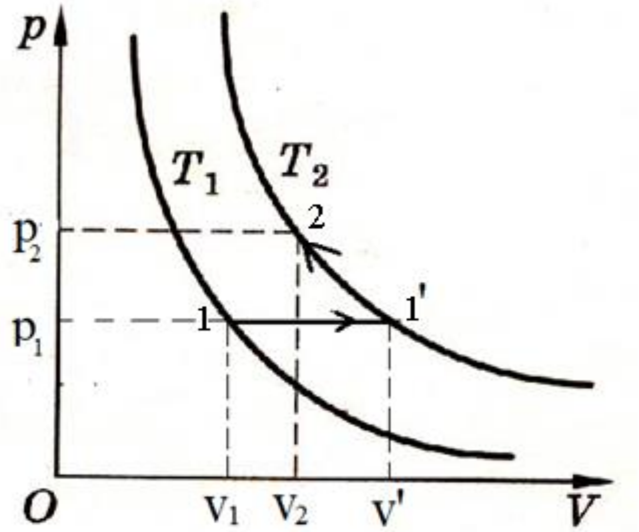


Рисунок 39

Допустим, один моль идеального газа переходит из состояния 1 в состояние 2 через промежуточное состояние $1^{'}$. Тогда на участке $1–1^{'}$ переход происходит по изобарному закону, а на участке $1^{'} – 2$ – по изотермическому. Математически эти переходы описываются формулами

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V'}{T_2} \qquad (99)$$

$$P_1V' = P_2V_2 \qquad (100)$$

Подставляя V' из формулы (100) в (99), получаем

$$\frac{P_1V_1T_2}{T_1} = P_2V_2 далее\left(:T_2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

Следовательно, это выражение для любых состояний идеального газа является постоянной величиной, в том числе и для одного моля газа при нормальных условиях. Подставляя эти значения, можно определить значение этой постоянной величины

$$\frac{PV}{T} = \frac{1{,}013.10^5\,Па \cdot 0{,}0224 м^3 / моль}{273K} = const = R = 8{,}31\frac{Дж}{моль.К}$$

Данная постоянная ***R*** называется универсальной газовой постоянной. Таким образом, уравнением состояния одного моля идеального газа будет выражение

$$\frac{PV}{T} = R \text{ или } PV = RT \qquad (101)$$

Выражение (101) называют ***уравнением Клапейрона***.

Для произвольной массы газа надо домножить правую часть уравнения Клапейрона на число молей газа, что определяет выражение m/M, где m – масса газа, M – молярная масса. Таким образом, уравнение состояния идеального газа имеет вид:

$$PV = \frac{m}{M}RT \qquad (102)$$

Это уравнение называется уравнением Менделеева-Клапейрона. Оно является универсальным для любой массы идеального газа и из него частным образом для одного моля газа возникает уравнение Клапейрона.

4.3 Основные положения молекулярно-кинетической теории (МКТ). Основное уравнение МКТ

Молекулярно-кинетическая теория (МКТ) применяется не только к газу, а к любому агрегатному состоянию вещества. Ее основные положения следующие.

1. Все вещества в природе состоят из мельчайших частиц (молекул, атомов и т.д.)

Молекула – это мельчайшая частица вещества. ***Атом*** – это мельчайшая частица химического элемента. Количество и видов молекул – бесчисленное множество. Число видов атомов определяется числом химических элементов в таблице Менделеева. Например, может быть молекула сахара, но не может быть атом сахара, т.к. сахар это вещество.

2. Частицы вещества взаимодействуют между собой силами притяжения и отталкивания на расстояниях 10^{-7}-10^{-9} м.

3. Частицы соударяются со стенками сосуда и другими преградами посредством упругого удара

4. Частицы находятся в непрерывном хаотическом (броуновском) движении.

Получим основное уравнение МКТ, рассмотрев идеальный газ в замкнутом сосуде (рисунок 40).

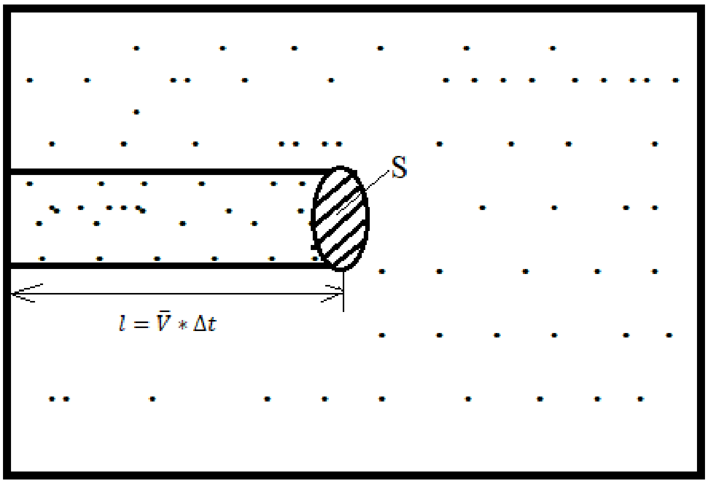


Рисунок 40

Будем полагать, что в сосуде находится газ с концентрацией частиц *n*. Рассмотрим в этом сосуде выделенный элементарный объем в виде горизонтального цилиндра ΔV, в котором находятся ΔN частиц газа. Эти частицы имеют разные скорости. Обозначим их среднюю скорость как $\bar{\upsilon}$. Тогда число частиц в выделенном объеме будет равно $\Delta N = n\Delta V$. Здесь $\Delta V = lS = \bar{\upsilon}\Delta t S$, где Δt – среднее время пробега частиц по длине выделенного цилиндра. Так как частицы газа двигаются по всем направлениям хаотически, то из геометрических и вероятностных соображений в направлении одного торца *S* цилиндра будет двигаться шестая доля всех частиц, т.е.

$$\Delta N_S = \frac{1}{6} n\overline{\upsilon\Delta t}S \tag{103}$$

Эти частицы, ударяясь упруго о торец цилиндра, изменяют свой импульс, и это изменение импульса будет равно

$$\Delta J_S = \Delta J_1 \Delta N_S = 2m\bar{\upsilon}\frac{1}{6}n\bar{\upsilon}\Delta tS = \frac{1}{3}mn\bar{\upsilon}^2\Delta tS, \tag{104}$$

где m – масса частицы.

По закону изменения импульса импульс силы равен импульсу тела

$$F\Delta t = \Delta J_S \tag{105}$$

В данном случае F – сила давления газа на стенки сосуда. Из уравнений (104) и (105) получаем

$$F = \frac{1}{3}mn\bar{\upsilon}^2 S$$

Тогда давление будет равно

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{3}mn\bar{\upsilon}^2$$

$$P = \frac{1}{3}mn\bar{\upsilon}^2 \text{ – основное уравнение МКТ,} \tag{106}$$

где m – масса молекулы, n – концентрация молекул, $\bar{\upsilon}^2$ – квадрат средней скорости молекул.

Это уравнение показывает связь макроскопической характеристики – давления с микроскопическими характеристиками вещества. МКТ позволяет расшифровать физическую суть давления.

Из основного уравнения МКТ возникают два следствия:

- ✓ температура является мерой средней кинетической энергии молекул,
- ✓ скорость газовых молекул зависит от температуры.

То есть температура является главным параметром МКТ. Убедимся в этом.

4.4 Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа. Понятие о температуре

Возьмем один моль идеального газа. Для него уравнение состояния

$$PV_M = RT,$$

где P – давление газа, V_M – молярный объем, R – универсальная газовая постоянная, T – температура

Основное уравнение МКТ

$$P = \frac{1}{3} mn\bar{\upsilon}^2, \qquad (107)$$

где m – масса молекулы, n– концентрация молекул, $\bar{\upsilon}^2$– квадрат средней скорости молекул.

Средняя кинетическая энергия молекул равна

$$\bar{E}_K = \frac{m\bar{\upsilon}^2}{2} \qquad (108)$$

Тогда, преобразовывая выражения (107) и (108), получаем

$$P = \frac{2}{3} n\bar{E}_K$$

Или, подставляя это значение давления в формулу уравнения состояния одного моля идеального газа, получаем

$$\frac{2}{3} n\bar{E}_K V_M = RT \Rightarrow \bar{E}_K = \frac{3}{2}\frac{RT}{nV_M}$$

Выражение $nV_M = N_A$ – постоянная Авогадро. Тогда $\bar{E}_K = \frac{3RT}{2N_A}$. Отношение $\frac{R}{N_A}$ заменим на постоянную k – ***постоянная Больцмана***. Тогда окончательно получаем

$$\bar{E}_2 = \frac{3}{2} kT \qquad (109)$$

Числовое значение постоянной Больцмана

$$k = \frac{8{,}31}{6 \cdot 10^{23}} \frac{Дж / моль \cdot К}{моль^{-1}} = 1{,}36 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}$$

Следовательно, $\bar{E}_K \sim T$. ***Температура*** – мера средней кинетической энергии идеального газа.

Можно также получить еще одну формулу связи давления газа с концентрацией частиц и температурой, если

$$P = \frac{2}{3} n\bar{E}_K \text{ и } \bar{E}_K = \frac{3}{2} kT \text{, то } P = nkT$$

Отсюда получается, что концентрация частиц газа

$$n = \frac{P}{kT},$$

следовательно, при нормальных условиях в одном кубическом метре идеального газа содержится определенное число частиц, и эта постоянная величина называется ***числом Лошмидта***

$$n = \frac{1{,}013 \cdot 10^5}{1{,}36 \cdot 10^{-23} \cdot 273} \frac{Па}{\frac{Дж \cdot К}{К}} = 2{,}59 \cdot 10^{25} м^{-3}$$

Таким образом, температура является энергетической характеристикой вещества. Поэтому единицей ее измерения должен бы быть Джоуль и его составляющие. Но исторически сложилось, что температурными шкалами стали градусы: Цельсия, Кельвина, Фаренгейта, Реомюра и т.д. Наиболее распространенными являются шкала Цельсия и международная абсолютная шкала Кельвина. Связь между ними

$$T(К) = t(^0C) + 273$$

Все физические расчеты проводятся в системе СИ – шкале Кельвина, которая исключает применение отрицательных температур.

4.5 Средняя квадратичная скорость газовых молекул

Известно, что кинетическая энергия газовых молекул можно определить двумя формулами

$$\bar{E}_К = \frac{m\bar{\upsilon}^2}{2} \text{ и } \bar{E}_К = \frac{3}{2}kT$$

Тогда, объединяя правые части формул, получаем

$$\bar{\upsilon}^2 = \frac{3kT}{m}, \ \sqrt{\bar{\upsilon}^2} = u = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad \text{– **средняя квадратичная скорость**} \qquad (110)$$

Или, домножая на постоянную Авогадро числитель и знаменатель подкоренного выражения формулы, можно получить другую эквивалентную формулу этой скорости

$$u = \sqrt{\frac{kTN_A}{mN_A}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}, \qquad (111)$$

где R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса. Из этих формул видно, что скорость молекул зависит от температуры и сорта газа и пропорциональна корню квадратному от температуры $u \sim \sqrt{T}$. То есть температура непосредственно определяет скорости молекул. Для примера определим величину средеквадратичной скорости молекулы кислорода при нормальных условиях.

$$u = \sqrt{\frac{RT}{M}} = \sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 273}{0{,}032}} \approx 460 м/с$$

4.6 Распределение молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла). Скорости газовых молекул

В отличие от классической механики молекулярная физика имеет дело с бесчисленным количеством мельчайших частиц, составляющих вещество, которые хаотически двигаясь, обладают различными скоростями и поэтому невозможно точно определить их координаты и скорости движения. А основная задача механики, в том числе статистической это определение положения тела в любой момент времени. Поэтому в молекулярной физике надо говорить о вероятностных величинах для усредненных характеристик ансамбля молекул. И использовать во многих случаев математический аппарат теории вероятностей. В молекулярной физике существуют два распределения молекул по скоростям и координатам, разработанные Максвеллом и Больцманом, позволяющие определить вероятность нахождения молекул идеального газа в пространстве скоростей и координат в зависимости от параметров газа.

Рассмотрение начнем с распределения Максвелла. Это распределение позволяет определить вероятность обладания группами молекул той или иной скоростью в зависимости от температуры газа.

Рассмотрим в пространстве скоростей произвольный объем газа (рисунок 41).

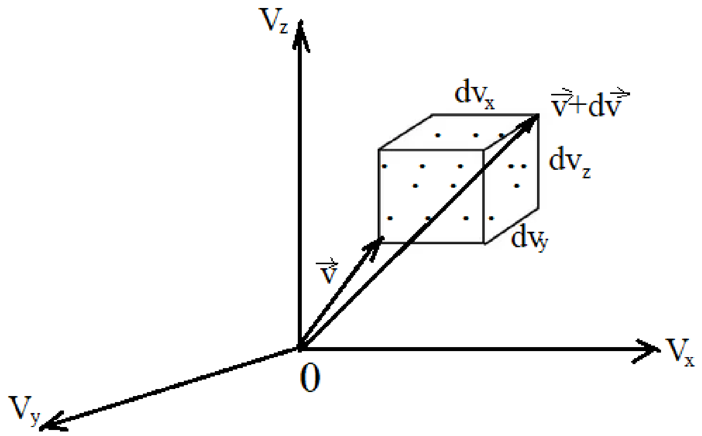


Рисунок 41

Будем полагать, что вероятность нахождения молекул газа в этом объеме в зависимости от направления скорости обозначается как $dW(\vec{V})$ и она пропорциональна размеру выделенного объема $dW(\vec{V}) \propto d\Omega$, где $d\Omega = dV_x dV_y dV_z$.

Тогда $dW(\vec{V}) = f(\vec{V})d\Omega$, где $f(\vec{V})$ – функция пропорциональности, называемая функцией плотности вероятности, или функцией распределения $f(\vec{V}) = \frac{dW(\vec{V})}{d\Omega}$. Эта функция распределения из теории вероятности равна

$$f(\vec{V}) = Ae^{-\alpha V^2},$$

где A и α – положительные постоянные. Оценка этих постоянных дает $A = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$, $\alpha = \frac{m}{2kT}$, где m – масса частицы, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура газа. Тогда

$$f(\vec{V}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} \qquad (112)$$

Тогда вероятность нахождения частиц газа в выделенном объеме

$$dW(\vec{V}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} d\Omega \qquad (113)$$

В данной формуле вероятность зависит от направления скорости, а частицы находятся в хаотическом движении и надо преобразовать формулу, в которой распределение частиц не зависело от направления скорости, а зависело только от величины скорости частиц газа. Для этого проведем такие размышления. Допустим частицы начинают разлетаться равновероятно во все стороны со скоростью V из какой точки. Через какое-то время они окажутся в сферическом объеме $\Omega = 4/3\,\pi V^3$ (при численном совпадении радиуса разлета частиц с величиной их скорости). Тогда $d\Omega = 4\pi V^2 dV$ и в этом выражении нет зависимости от направления скорости частиц, т.к. скорость возводится в квадрат. И тогда окончательно

$$dW(V) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} V^2 e^{-\frac{mV^2}{2kT}}, \qquad (114)$$

где $f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} V^2 e^{-\frac{mV^2}{2kT}}$ – функция распределения.

Физический смысл формулы (114) $dW(V)$ – т.е. распределения Максвелла – это вероятность, что данное количество частиц газа при данной температуре обладают скоростями в интервале V+dV. График функции распределения в зависимости от скорости частиц приведен на рисунке 42.

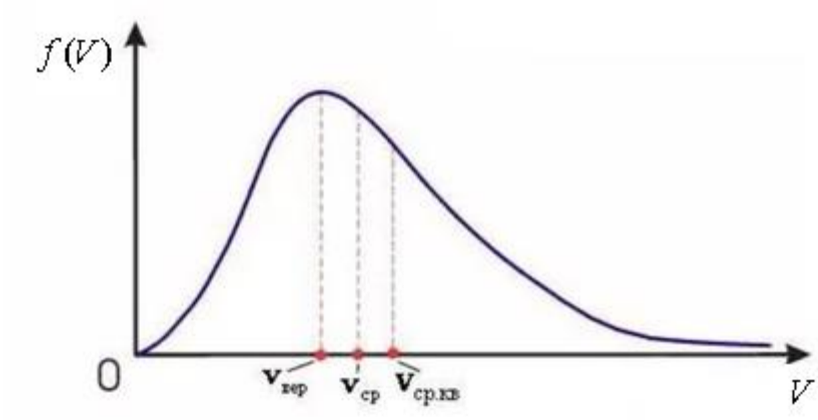


Рисунок 42 – Распределение Максвелла

Из графика видно, что в ансамбле множества частиц медленных и очень быстрых частиц (соответственно левая и правая части кривой распределения) значительно меньше, чем частиц со средними скоростями. При этом молекулы газа обладают тремя видами средних скоростей: среднеквадратичной $V_{ср.кв}$ (ранее обозначили u), среднеарифметической $V_{ср}$ ($\bar{V}$) и наиболее вероятная $V_{вер}$. Как видно, эти скорости имеют разные значения $u > \bar{V} > V_{вер}$.

Ранее была получена формула среднеквадратичной скорости

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где R – универсальная газовая постоянная, T – температура газа, M – молярная масса.

Расчеты показали, что ***среднеарифметическая скорость*** газовых частиц равна

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{2,6RT}{M}},$$

наиболее вероятная скорость равна

$$V_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Так, например, для молекул кислорода при нормальных условиях эти скорости равны u = 460 м/с, $\bar{V}$ =423 м/с, $V_{вер}$ =377 м/с.

Естественно, эти скорости увеличиваются при нагревании газа и максимум кривой функции распределения смещается вправо (рисунок 43)

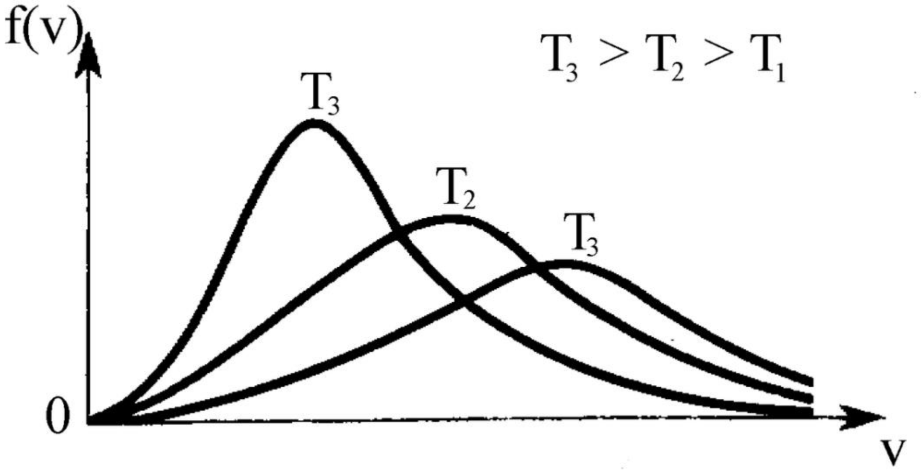


Рисунок 43 – Распределение Максвелла

При этом площадь фигуры под графиком остается неизменной, т.к. она характеризует число газовых частиц.

Экспериментальным доказательством теории Максвелла стали опыт Штерна (1920) и опыт Ламмерта (1929).

Опыт Штерна по испусканию одноатомного серебряного газа в вакууме в двух, расположенных друг под другом цилиндрах получил профиль напыленного газа соответствующий профилю функции распределения Максвелла, а расчеты совпали с теоретическими данными. На рисунке 44 приведена схема опыта Штерна.

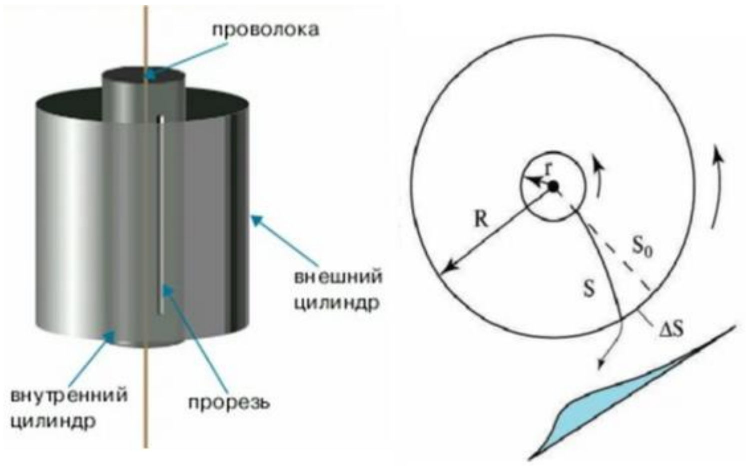


Рисунок 44 – Схема опыта Штерна

4.7 Распределение молекул по координатам (распределение Больцмана). Барометрическая формула

Это распределение позволяет определить вероятность нахождения частиц газа в том или ином месте пространства с учетом или без учета влияния внешних сил. Как при распределении Максвелла рассмотрим вероятность нахождения молекул газа в произвольном выделенном объеме только не в пространстве скоростей, а в пространстве координат $r + \Delta r$ (рисунок 45).

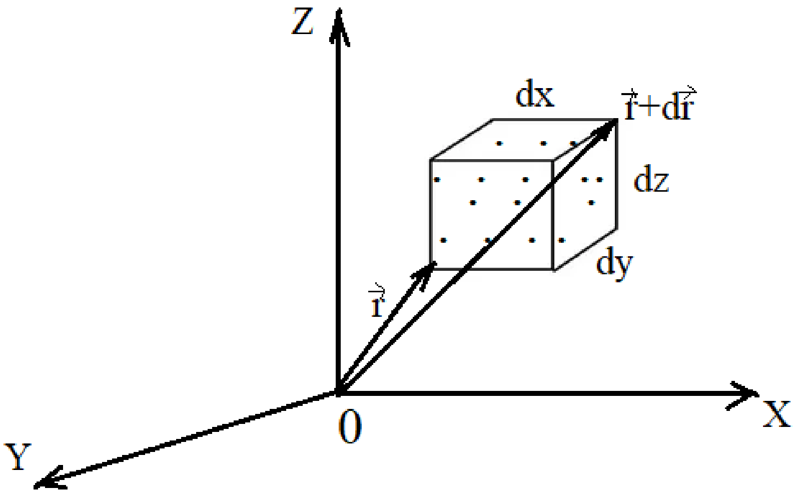


Рисунок 45

Обозначим эту вероятность как $dW(\vec{r})$. Она будет пропорциональна величине выделенного объема $dV = dxdydz$. То есть $dW(\vec{r}) \sim dV$. Или $dW(\vec{r}) = f(\vec{r})dV$, где $f(\vec{r})$ – функция распределения частиц по координатам.

Эту функцию необходимо нормировать. Условием нормировки является утверждение, что во всем безразмерном пространстве находятся все частицы газа, т.е. 100%, или $W(\vec{r}) = 1$. Математически это $\int\limits_V f(\vec{r})dV = W\overline{(r) = 1}$

$f(\vec{r})\int\limits_V dV = 1 \quad f(\vec{r})V = 1 \quad f(\vec{r}) = \frac{1}{V}$. Домножим числитель и знаменатель этого выражения на концентрацию частиц газа n

$$f(\vec{r}) = \frac{n}{nV} = \frac{n}{N},$$

где N – число частиц газа в объеме V.

Тогда вероятность нахождения частиц в данном объеме пространства газа равна

$dW(\vec{r}) = \frac{n}{N}dV$ – *распределение Больцмана* при отсутствии внешних сил.

То есть, чем меньше объем, тем больше вероятность, что частицы газа там обнаружатся.

В реальной ситуации сами частицы газа обладают силой тяжести и на них действуют внешние силы. Поэтому концентрация частиц газа не является постоянной величиной в любой точке пространства и надо оценить зависимость ее от координат, т.е. $n = n(\vec{r})$.

Для этого рассмотрим реальный случай-распределение частиц воздуха, находящихся на какой-то высоте от поверхности Земли выделенном объеме цилиндра (рисунок 46).

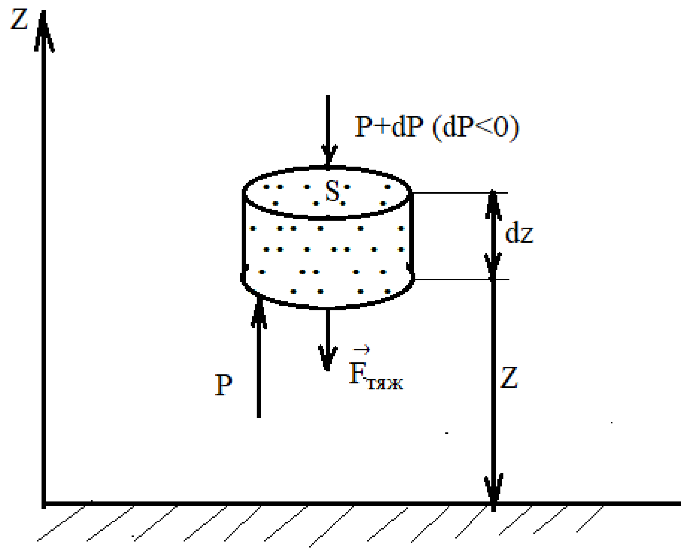


Рисунок 46

Будем полагать, что воздух является идеальным газом и его температура при незначительных высотах постоянная, т.е. T = *const*.

Тогда выделенный цилиндрический объем с молекулами воздуха будет находиться в положении равновесия, если сумма сил, действующих на объем сверху и снизу, уравновешивала друг друга. В нашем случае это:

$$F_{тяж} + (P + dP)S = PS,$$

где P – давление воздуха, а т.к. это давление с высотой уменьшается, то изменение давления $dP < 0$. Сила тяжести всех частиц, находящихся в выделенном объеме равна

$$F_{тяж} = mgN = mgndV = mgnSdz,$$

m – масса частицы, N – число частиц, n – концентрация частиц. Тогда

$$mgnSdz + (P + dP)S = PS$$

$$dP = -mgndz$$

Известно, что $P = nkT$. Тогда

$$\frac{dP}{P} = -\frac{mgdz}{kT},$$

где k – постоянная Больцмана. Или

$$\frac{dP}{P} + \frac{mgdz}{kT} = 0 \qquad \ln P + \frac{mgdz}{kT} = const = \ln P_0,$$

где P_0 – давление воздуха на поверхности Земли. Тогда

$$\ln P-\ln P_0=-\frac{mgdz}{kT}\Rightarrow\frac{\ln P}{\ln P_0}=-\frac{mgdz}{kT}$$

$$P=P_0e^{-\frac{mgz}{kT}} \qquad (115)$$

Или, выполнив преобразование $\frac{mgz}{kT}=\frac{mN_Az}{kN_AT}=\frac{Mgz}{RT}$, где N_A – постоянная Авогадро, M – молярная масса газа, R – универсальная газовая постоянная, получаем

$$P=P_0e^{-\frac{Mgz}{RT}} \qquad (116)$$

Формулы (115) и (116) называются барометрическими, и позволяют определить давление газа в зависимости от высоты от поверхности Земли. Видно, что давление с высотой уменьшается по экспоненциальному закону (рисунок 47)

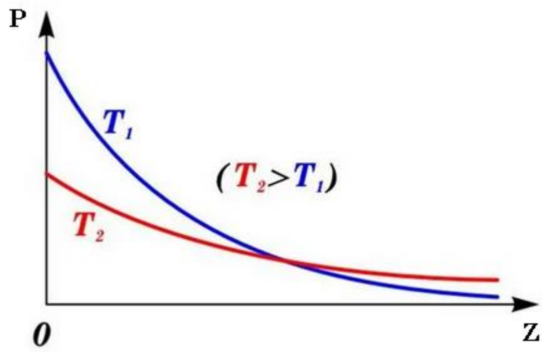


Рисунок 47

Подставив в формулу $P=P_0e^{-\frac{mgz}{kT}}$, $P=nkT$, получим

$$n=n_0e^{-\frac{mgz}{kT}}=n_0e^{-\frac{u(z)}{kT}},$$

где *u(z)* - потенциальная энергия частиц.

Таким образом, распределение Больцмана по координатам частиц при действии внешних сил имеет вид

$$dW(\vec{r})=\frac{n}{N}=\frac{n_0e^{-\frac{u(\vec{r})}{kT}}}{N}dV \qquad (117)$$

Здесь $u(\vec{r})$ – потенциальная энергия внешней силы в зависимости от декартовых координат *r=f(x,y,z).*

Физический смысл распределения Больцмана: вероятность нахождения частиц газа в объеме, определяемыми координатами в интервале $\vec{r}+d\vec{r}$.

Концентрация молекул убывает с увеличением высоты. При постоянном значении температуры изменение концентрации зависит от массы молекул (рисунок 48).

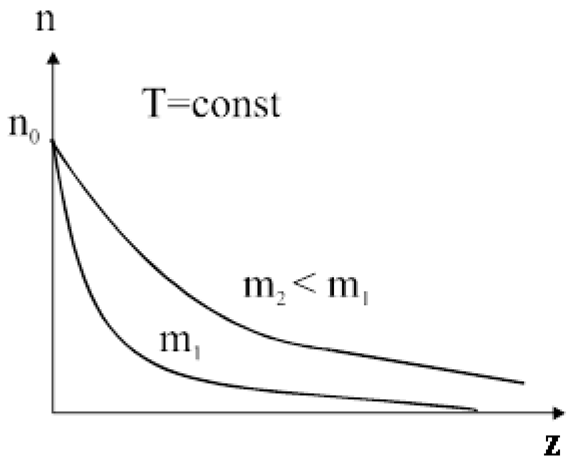


Рисунок 48

Воздух представляет собой смесь газов, молекулы которых обладают различными массами. Поэтому с увеличением высоты над поверхностью Земли меняется не только концентрация молекул, но и соотношение между различным компонентами воздуха. Эти изменения в процентном составе атмосферы становятся заметными на высотах более 100 км. Этот слой называется *гетеросферой* (слой до 100 км называется *гомосферой*). В гетеросфере растет доля легких газов, и на очень больших высотах преобладающими становятся He и H_2.

4.8 Средняя длина свободного пробега молекул. Понятие о вакууме

Ввиду хаотичности теплового движения молекул их траектория представляет собой ломаную прямую линию с изломами в точках столкновения молекул с соседними молекулами. Расстояние, которое пробегает молекула до столкновения с другой молекулой, называется длиной свободного пробега λ (рисунок 49).

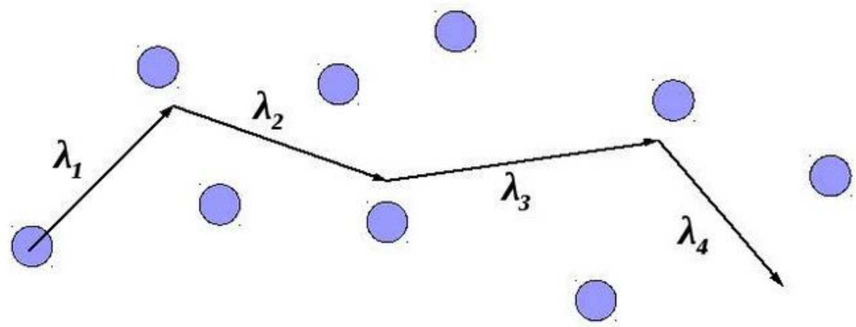


Рисунок 49

Ее длина при столкновениях разная и поэтому во всех расчетах используют среднюю длину свободного пробега $\overline{\lambda}$.

Должно выполняться соотношение

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{V}}{\overline{z}},$$

где $\overline{V}$ – средняя скорость частиц, $\overline{z}$ – среднее число столкновений частиц друг с другом в 1 с.

Для определения этих характеристик рассмотрим соударение двух частиц с разными скоростями, соударяющимися друг с другом под произвольным углом (рисунок 50)

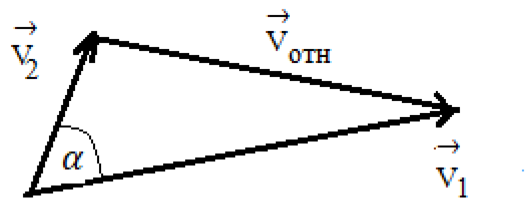


Рисунок 50

Вектор $\vec{V}_{OTH}$ представляет собой относительную скорость этих частиц $\vec{V}_{OTH} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$.

Из этого произвольного треугольника по теореме косинусов получается

$$V_{OTH}^2 = V_1^2 + V_2^2 - V_1 V_2 \cos\alpha$$

При усреднении этих величин $\overline{V_1} = \overline{V_2} = \overline{V}$, $\overline{\cos\alpha} = 0$ и тогда

$$\overline{V_{OTH}^2} = 2\overline{V^2} \qquad \overline{V} = \frac{\overline{V_{OTH}}}{\sqrt{2}}$$

Для нахождения $\overline{z}$ рассмотрим такой рисунок 51.

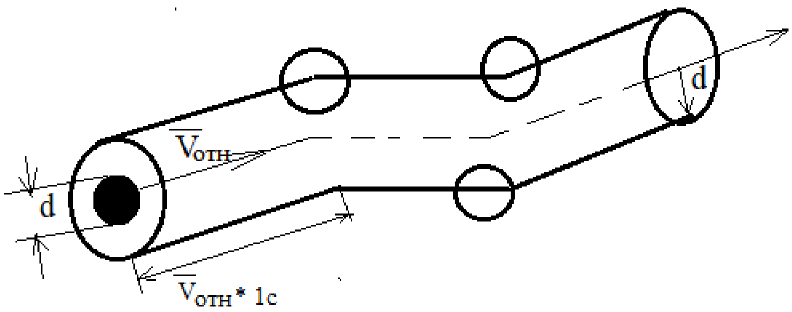


Рисунок 51

Молекула диаметром d и средней относительной скоростью $\overline{V}_{OTH}$ столкнется только с теми молекулами, центр тяжести которых попадет в цилиндр радиусом равным диаметру молекулы d. Тогда расстояние, которое пройдет эта молекула за 1 с будет равно $\overline{V}_{OTH} \cdot 1c = \overline{V}_{OTH}$. Число молекул, с которыми столкнется эта молекула за 1 с равно $N = nV$, где n – концентрация частиц, V – объем цилиндра между столкновениями частиц. То есть $N = n\pi d^2 \overline{V_{OTH}}$. Это число частиц определяет среднее число столкновений в единицу времени 1 с. Значит

$$\overline{z} = n\pi d^2 \overline{V_{OTH}},$$

тогда

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{V_{OTH}}}{\sqrt{2}\pi n d^2 \overline{V_{OTH}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2},$$

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2} \qquad (118)$$

Существует и другая формула средней длины свободного пробега молекул, Известно, что $p=nkT$, где p – давление газа, k – постоянная Больцмана,T – абсолютная температура газа. Тогда подставляя в формулу давление, получаем

$$\overline{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p d^2} \qquad (119)$$

Из этих формул видно, как влияют температура и давление на длину свободного пробега молекул в веществе.

Расчеты показывают, что при обычных условиях в среднем молекулы газа имеют длину свободного пробега около 10^{-7} м и сталкиваются друг с другом за 1 с около 10^{10} раз.

В физике состояние газа, при котором в данном объеме молекулы не сталкиваются друг с другом, называется физическим вакуумом. В зависимости от давления и температуры он не имеет точных значений и определяется габаритами замкнутых устройств, содержащих конкретный газ.

4.9 Явления переноса

Хаотическое движение газовых молекул приводит к перемешиванию газа. С этим связаны различные физические явления, которые называются явлениями переноса. Таких основных явлений три. В этих явлениях молекулы газа, перемещаясь из слоя в слой переносят определенную физическую характеристику: массу, кинетическую энергию, импульс. Механизм этих явлений одинаков и часто описывается одним выражением в общем виде. Но целесообразно рассмотреть эти явления отдельно для лучшего понимания их физического смысла. Явления переноса наблюдается не только в газах, но и в жидких и твердых телах, но там они протекают медленнее.

4.9.1 Диффузия

Допустим, имеется источник, испускающий какой-то летучий газ, например эфир. Из источника вылетают молекулы по всем направлениям. Рассмотрим их перемещение вдоль горизонтальной оси (рисунок 52).

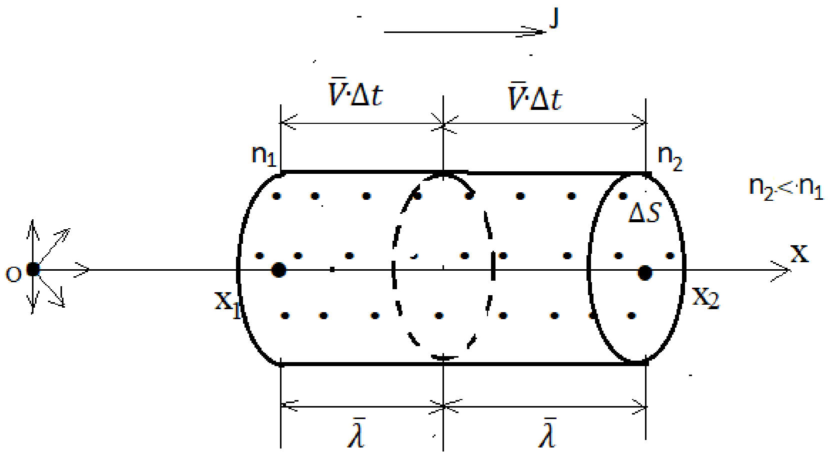


Рисунок 52

Возьмем в рассмотрение поведение молекул, расположенных в произвольном горизонтальном цилиндре. Тогда концентрация молекул испаряемого вещества по мере удаления от испарителя уменьшается и $n_2 < n_1$. То есть происходит слева направо перенос массы вещества. Такое явление называется *диффузией*. Выразим математически это явление.

Обозначим ΔN_+ -число молекул газа, перемещающихся от координаты x_1 вправо через серединную перегородку цилиндра, через ΔN_- – число молекул, движущихся из координаты x_2 соответственно влево через эту же перегородку.

В связи с хаотичности движения частиц газа по теории вероятности в направлении оси *OX* перемещается шестая доля всех частиц. Поэтому

$$\Delta N_+ = \frac{1}{6} n_1 \bar{v} \Delta t \Delta S, \Delta N_- = \frac{1}{6} n_2 \bar{v} \Delta t \Delta S,$$

$$\Delta N = \Delta N_+ - \Delta N_- = \frac{1}{6} \bar{v} \Delta t \Delta S (n_1 - n_2)$$

Обозначим через *J* диффузионный поток $J = \frac{\Delta N}{\Delta t \Delta S}$.

Тогда

$$J = \frac{1}{6}(n_1 - n_2)\bar{v}$$

Домножая числитель и знаменатель выражения на среднюю длину свободного пробега молекул, получаем

$$J = \frac{1}{6}(n_1 - n_2)\bar{v}\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} \qquad J = \frac{1}{3}(n_1 - n_2)\frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda}}\bar{v} \tag{120}$$

Величина $\frac{n_2 - n_1}{2\bar{\lambda}} = \frac{\Delta n}{\Delta x}$ называется градиентом концентрации.

Тогда

$$J = -\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\frac{\Delta n}{\Delta x} \tag{121}$$

Величина $\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$ является постоянной величиной, зависит от характеристик среды и называется коэффициентом диффузии *D*.

$$J = -D\frac{\Delta n}{\Delta x} \tag{122}$$

Данное уравнение (122) называется уравнением диффузии (***уравнением Фика***) и оно показывает, что диффузионный поток вещества направлен в сторону уменьшения концентрации этого вещества.

4.9.2 Теплопроводность

Как выше при изучении явления диффузии, рассмотрим газ в условном цилиндре, поместив в начало координат вместо испарителя нагреватель. Тогда по оси *OX* будет изменяться температура газа, которая обусловлена кинетической энергией молекул (рисунок 53).

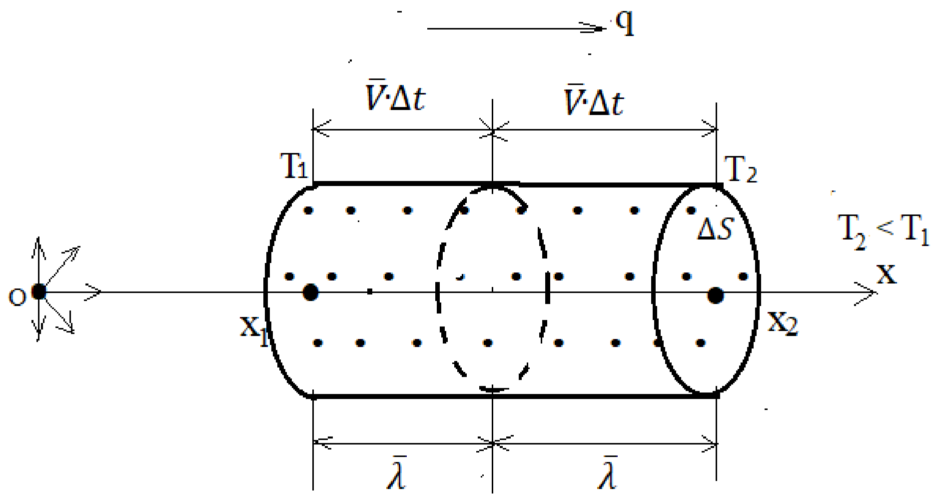


Рисунок 53

Тогда концентрация молекул во всем объеме пространства будет одинакова и число частиц, движущихся влево и вправо в выделенном цилиндре от центральной перегородки равно

$$\Delta N_{+} = \Delta N_{-} = \frac{1}{6} n\bar{v}\Delta t \Delta S$$

Но из-за разности температур вдоль оси *OX* кинетическая энергия поступательного движения молекул в левой и правой части цилиндра разная и равна для одной молекулы соответственно

$$E_{k(1)} = \frac{3}{2}kT_1,\ E_{k(2)} = \frac{3}{2}kT_2,$$

где *к* – постоянная Больцмана. Тогда средняя кинетическая энергия всех частиц, движущихся в положительном направлении через центральную перегородку цилиндра равна

$$\overline{E_{k(+)}} = \Delta N_{+}\frac{3}{2}kT_1 = \frac{1}{6}n\bar{v}\Delta t\Delta S = \frac{1}{4}nk\bar{v}\Delta t\Delta S T_1,$$

а в противоположную сторону

$$\overline{E_{k(-)}} = \Delta N_{-}\frac{3}{2}kT_2 = \frac{1}{6}n\bar{v}\Delta t\Delta S = \frac{1}{4}nk\bar{v}\Delta t\Delta S T_2$$

Эта суммарная кинетическая энергия всех газовых молекул представляет собой теплоту и может быть выражена для данного объема формулами $\Delta Q_{+} = \overline{E_{k(+)}}$ и $\Delta Q_{-} = \overline{E_{k(-)}}$. Тогда разность тепловых потоков через центральную перегородку цилиндра равна

$$\Delta Q = \Delta Q_{+} - \Delta Q_{-} = \frac{1}{4}nk\bar{v}\Delta t\Delta S(T_1 - T_2)$$

Так как столкновения молекул происходят на растояниях длины свободного пробега молекул, то введя в формулу среднюю длину свободного пробега молекул, получаем преобразование

$$\Delta Q = \frac{1}{4} n k \bar{v} \Delta t \Delta S (T_1 - T_2) \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}$$

В этом выражении $\frac{T_2 - T_1}{2\bar{\lambda}} = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} = \frac{\Delta T}{\Delta x}$ – градиент температуры. Тогда

$$\Delta Q = -\frac{1}{2} n k \bar{v} \Delta t \Delta S \bar{\lambda} \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Величина $q = \frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta S}$ – удельный тепловой поток, а $\frac{1}{2} n k \bar{v} \bar{\lambda}$ – постоянные величины, которые заменяем одной буквой χ (каппа) – *удельная теплопроводность*. Тогда

$$q = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x} \tag{123}$$

Выражение (123) – уравнение теплопроводности **(*уравнение Фурье*)**

Это уравнение показывает, что тепловой поток пропорционален градиенту температуры и направлен в сторону его уменьшения.

4.9.3 Внутреннее трение (вязкость)

Газы и жидкости при своем движении испытывают внутреннее трение, т.е. обладают вязкостью. Если изменить скорость движения слоев газа или жидкости по сечению трубы (газо-водопровод), то можно заметить, что наибольшей скоростью обладают частицы газа или жидкости, расположенные в центральной части трубы, а наименьшей – у боковых ее стенок (рисунок 54)

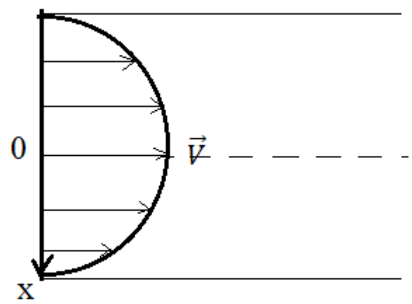


Рисунок 54

Следовательно, соседние слои газа или жидкости обладают внутренним трением и оно усиливается от центра к краям трубы. Физическую причину этого явления переноса рассмотрим при помощи следующей схемы (рисунок 55)

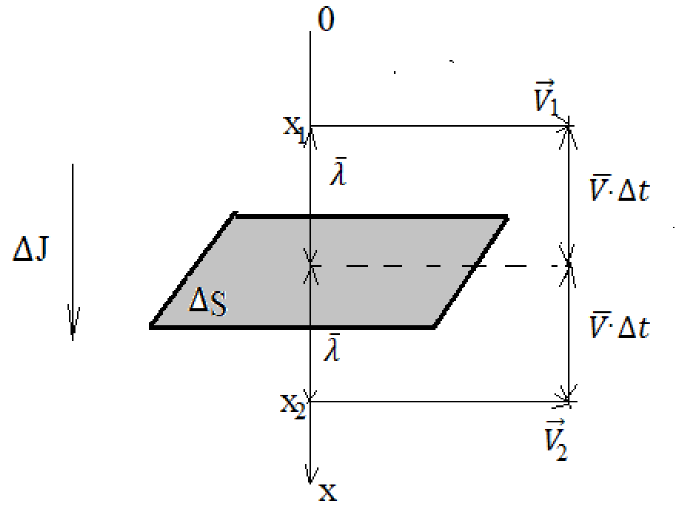


Рисунок 55

Изобразим в вертикальном положении ось сечения трубы от ее центра к стенке (ось *OX*). Посередине оси поместим горизонтальную площадку площадью ΔS. Пусть на расстояниях, равных средней длине свободного пробега молекул газа или жидкости $\bar{\lambda}$ в точках x_1 и x_2 скорости молекул в этих слоях газа или жидкости равны соответственно $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. В данном случае эти молекулы, перемещаясь из слоя в слой от центра трубы к периферии, переносят свой импульс и его изменение обозначим ΔJ.

Число частиц, перемещающихся вследствие хаотичности движения в среде в положительном и отрицательном направлениях оси *OX*, одинаково и как в случае явления теплопроводности равно

$$\Delta N_+ = \Delta N_- = \frac{1}{6} n\bar{V}\Delta t\Delta S$$

Изменение импульса всех частиц будет различное и выражается формулами

$$\Delta J_+ = mV_1\Delta N_+ = \frac{1}{6} mV_1 n\bar{V}\Delta t\Delta S$$

$$\Delta J_- = mv_2\Delta N_- = \frac{1}{6} mv_2 n\bar{V}\Delta t\Delta S$$

Тогда результирующее изменение импульса всех частиц в этом явлении переноса равно

$$\Delta J = \Delta J_+ - \Delta J_- = \frac{1}{6} mn\bar{V}\Delta t\Delta S(V_1 - V_2)$$

По закону изменения импульса изменение импульса тела равно импульсу силы

$\Delta J = F_{Tp}\Delta t$, где F_{Tp} - сила трения между соседними слоями газа или жидкости.

$$F_{Tp} = \frac{1}{6} mn\bar{V}\Delta S(V_1 - V_2)$$

Обозначим $f_{Tp} = \frac{F_{Tp}}{\Delta S}$ как удельную силу трения.

$$f_{Tp} = \frac{1}{6} mn\bar{v}(V_1 - V_2)$$

Домножим выражение на $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}$ и введем понятие градиента скорости как

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V_2 - V_1}{2\bar{\lambda}}$$

Тогда $f_{Tp} = -\frac{1}{3} mn\bar{V}\bar{\lambda}\frac{\Delta V}{\Delta x}$

Или, заменяя группу постоянных одной постоянной – коэффициентом внутреннего трения $\eta = \frac{1}{3} mn\bar{V}\bar{\lambda}$, получим

$$f_{Tp} = -\eta \frac{\Delta V}{\Delta x} \qquad (124)$$

Выражение (124) – уравнение внутреннего трения (вязкости) газа или жидкости **(*уравнение Ньютона*).**

Физический смысл: сила трения между соседними слоями газа или жидкости пропорциональна градиенту скорости и направлена в сторону уменьшения скорости.

Таким образом, все три явления переноса в молекулярной физике имеют похожий механизм и обусловлены переносом частицами среды из слоя в слой либо массы вещества (диффузия), либо кинетической энергии частиц (теплопроводность), либо импульса частиц (внутреннее трение). При этом эти явления переноса направлены в сторону уменьшения градиента своих свойств.

Контрольные вопросы

1. Какой газ называется идеальным?
2. Сформулируйте и запишите закон Бойля-Мариотта для идеального газа.
3. Сформулируйте и запишите закон Гей-Люссака для идеального газа.
4. Сформулируйте и запишите закон Шарля для идеального газа.
5. Сформулируйте и запишите закон Авогадро для идеального газа.

6. Запишите уравнение состояния идеального газа Менделеева-Клапейрона.
7. Основное уравнение МКТ для идеального газа.
8. Что называется температурой?
9. Чему равняется средняя энергия молекулы идеального газа?
10. Чему равняется квадратичная скорость молекул идеального газа?
11. С какой целью был поставлен опыт Штерна?
12. Что называется длиной свободного пробега молекул газа?
13. Перечислите явления переноса и их законы

Раздел V. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

5.1 Понятие о числе степеней свободы. Внутренняя энергия идеального газа

В механике и молекулярной физике используется в решении некоторых задач понятие числа степеней свободы тела. По определению число степеней свободы-это число независимых координат, определяющих положение тела в пространстве. Например, в декартовой системе *xyz* таких координат максимум может быть шесть: три поступательных по осям *xyz* и три вращательных около этих осей. Например, если нужно описать движение железнодорожного вагона, идущего по прямолинейному участку пути, достаточно знать изменение с течением времени поступательной координаты *x*. И значит, число степеней свободы равно единице. Для колес вагона это число равно двум, потому что добавляется еще вращательная координата оси вращения. Для описания полета футбольного мяча необходимо ввести уже все три поступательных координаты *xyz*, но вращательные координаты не учитываются, т.к. мяч является материальной точкой и вращение его не меняет не меняет положение тела в пространстве.

Перейдем к молекулярной физике. Молекулы в веществе могут быть одноатомные, двухатомные и многоатомные. Одноатомная молекула является маиериальной точкой и поэтому для нее число степеней свободы равно трем - все поступательные координаты (как пример с футбольным мячом). Двухатомная молекула обладает пятью ***степенями свободы***: к трем поступательным добавляются две вращательных, но не учитывается вращение молекулы вдоль своей ковалентной химической связи, т.к. при этом не меняется положение молекулы в пространстве. Многоатомные молекулы из-за несимметричности своей структуры описываются всеми шестью степенями свободы: и поступательными, и вращательными. Принято ***число степеней свободы*** обозначать буквой ***i.*** И поэтому в молекулярной физике у одноатомных молекул (инертные газы) $i= 3$, у двухатомных (O_2, N_2) $i = 5$, у многоатомных (NH_3) $i = 6$.

Определим внутреннюю энергию идеального газа. В идеальном газе полная энергия представляет собой сумму кинетических энергий ее молекул. Потенциальная энергия считается пренебрежимо малой.

Чтобы определить внутреннюю энергию идеального газа, вспомним, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа равна

$\overline{E}_k = \frac{3}{2}kT$, где $к$ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура газа. А так как при поступательном движении число степеней свободы три, то значит, на одну степень свободы приходится $\overline{E}_k = \frac{1}{2}kT$. Отсюда в общем случае для произвольной молекулы идеального газа $\overline{E}_k = \frac{i}{2}kT$, где i – число степеней свободы молекул газа. Тогда внутренняя энергия одного моля идеального газа равна

$u_M = \overline{E_k}N_A = \frac{i}{2}kTN_A = \frac{i}{2}RT$, где N_A – постоянная Авогадро, R – универсальная газовая постоянная.

$$u_M = \frac{i}{2}RT \qquad (125)$$

Внутренняя энергия произвольной массы газа равна

$$u_m = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT, \qquad (126)$$

где m – масса газа, M – молярная масса.

5.2 I начало (закон) термодинамики. Работа, совершаемая при изменении объема газа

Термодинамика изучает количественные закономерности превращения энергии в различных процессах, обусловленных тепловым движением молекул. Она лежит в основе работы теплотехнических устройств. Термодинамика основана на двух фундаментальных законах, называемых началами. I начало термодинамики описывает количественную и качественную сторону изменения энергии в различных процессах. II начало термодинамики позволяет судить о направлении этих процессов.

Сначала ознакомимся с некоторыми понятиями термодинамики. ***Термодинамической системой*** называется тело, которому свойственны процессы превращения тепловой энергии в другие виды энергии и обратные процессы. Например, газ под поршнем в двигателях в процессе работы превращает тепловую энергию в механическую. Основными физическими параметрами термодинамической системы являются давление P, объем V и температура T газа. Таким образом, уравнением состояния термодинамической системы является функция от этих трех параметров. Для идеального газа – это уравнение Менделеева-Клапейрона.

Переход системы из одного состояния в другое называется ***термодинамическим процессом***. Термодинамические процессы могут быть обратимыми и необратимыми. Процесс, график которого изображен на рисунке 56, является обратимым, потому что его переход из состояния 1-2 и обратно из состояния 2-1 происходит по одной траектории, т.е. при одинаковых изменениях термодинамических параметров. Если б обратный переход происходил по иной траектории, то процесс был бы необратимым.

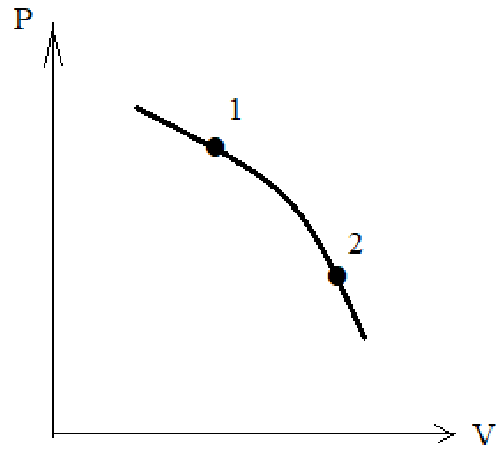


Рисунок 56

В природе все процессы являются необратимыми. Близкими к обратимым процессам являются различные технические циклические двигатели с цилиндром и поршнем внутри него, например двигатель внутреннего сгорания. Хотя силы трения, которых не избежать, строго говоря, все равно термодинамический процесс в нем делает его необратимым, и со временем двигатель потребует ремонт или замену.

Изменение состояния термодинамической системы сопровождается работой, которая совершается либо самой системой, либо внешними силами над системой.

Это определяет I начало термодинамики.

Для этого рассмотрим некую термодинамическую систему, обладающую внутренней энергией U_1. К этой системе подвели извне теплоту Q (рисунок 57).

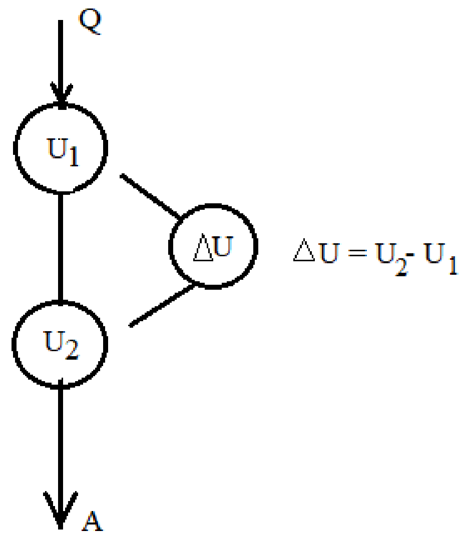


Рисунок 57

Тогда внутренняя энергия системы изменилась и стала U_2. При этом система совершила работу A. Значит, можно утверждать, что

$$Q = \Delta U + A, \tag{127}$$

или в дифференциальном виде

$$dQ = dU + dA \tag{128}$$

Эти формулы представляют I начало термодинамики: теплота, подводимая к термодинамической системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы и совершение работы.

Эти уравнения представляют собой фундаментальный закон сохранения энергии.

Для ряда случаев работу можно выразить через термодинамические параметры давление и объем. Для этого рассмотрим идеальный газ под поршнем в цилиндре двигателя (рисунок 58)

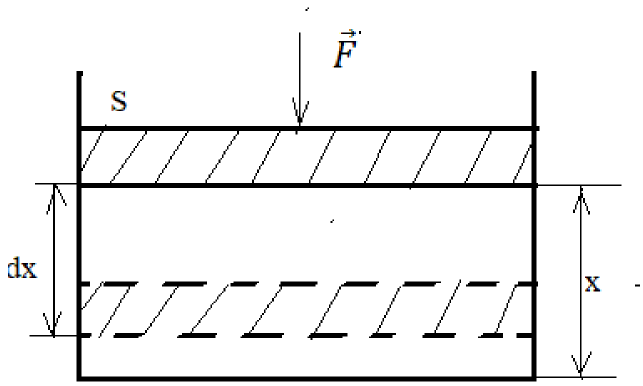


Рисунок 58

Пусть на поршень с площадью сечения S действует внешняя сила $\vec{F}$. Под ее воздействием поршень переместился на расстояние dx и совершил работу $dA = Fdx = pSdx = pdV$, где p – давление газа, dV – изменение его объема. Тогда формула I начала термодинамики примет вид

$$dQ = dU + pdV$$

Отсюда следует, что для определения полной работы при изменении объема газа в термодинамической системе нужно просуммировать бесконечно малые изменения работы, т.е. проинтегрировать эти величины $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$, что графически представлено на рисунке 59.

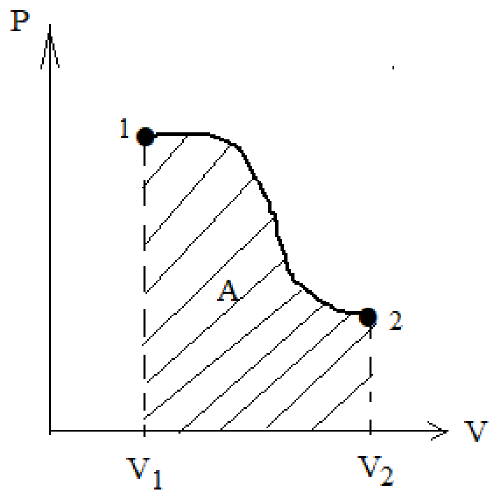


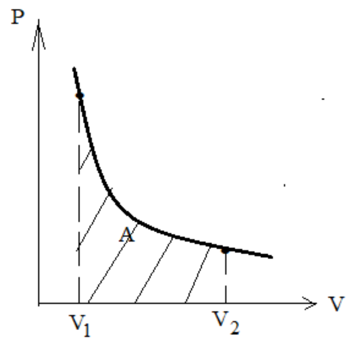
Рисунок 59

5.3Работа в изопроцессах

5.3.1Изотермический процесс

$T - const$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV \qquad (129)$$



Для одного моля идеального газа $pV = RT$, $p = \frac{RT}{V}$, $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Для произвольной массы газа

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \tag{130}$$

где m – масса газа, M – молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура газа, V_2 – конечный объем газа, V_1 – начальный объем газа.

5.3.2Изобарный процесс

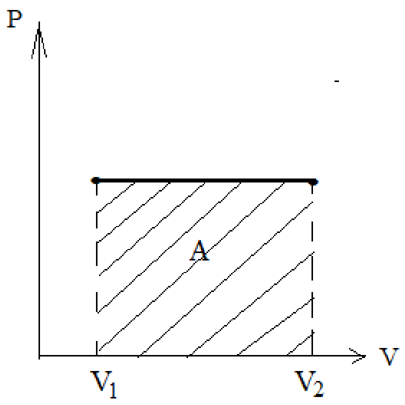
P – const

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

$$A = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V \text{ – для 1 моля газа}$$

Для произвольной массы газа

$$A = \frac{m}{M} p\Delta V \tag{131}$$

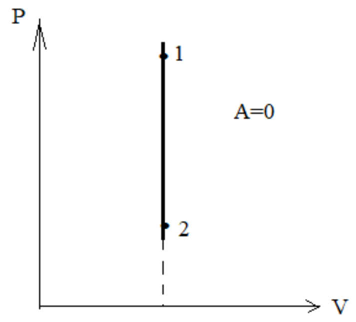


5.3.3Изохорный процесс

V – const

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

$$A = 0$$



Не изменяется объем газа – не совершается работа.

5.4Теплоемкость идеального газа

Определим количество теплоты, которое необходимо сообщить идеальному газу для его нагрева или охлаждения. Для этого используется характеристика под названием теплоемкость. *Теплоемкость тела* – это количество теплоты, которое надо затратить, чтобы нагреть или охладить массу вещества на определенную температуру. Математически это можно выразить формулой

$$Q = cm\Delta T \Rightarrow c = \frac{Q}{m\Delta T}, \qquad (132)$$

где Q – количество теплоты, c – удельная теплоемкость вещества, m – масса вещества, ΔT – разность температур конечной и начальной в процессе нагрева или охлаждения вещества.

В данном уравнении единица измерения удельной теплоемкости

$$[c] = \frac{[Q]}{[m][\square T]} = \frac{Дж}{кг \cdot К}.$$

Для газов обычно используют не удельную теплоемкость, а молярную теплоемкость и количество газа определяется в молях. Поэтому, заменив массу вещества на молярную массу газа, получим выражение $Q = cM\Delta T = C\Delta T$, где C – молярная теплоемкость газа, M – молярная масса газа. Отсюда единица измерения молярной теплоемкости

$$[C] = [c][M] = \frac{Дж.кг}{кг \cdot моль \cdot К} = \frac{Дж}{моль \cdot К}$$

В дифференциальном виде

$$dQ = CdT \Rightarrow C = \frac{dQ}{dT} \qquad (133)$$

Выражение (133) это формула теплоемкости идеального газа. Она имеет два частных случая. Идеальный газ может менять свои тепловые характеристики при нагреве или охлаждении, когда не меняется либо объем газа, либо его давление. То есть существует теплоемкость газа при постоянном объеме C_V и при постоянном давлении C_p. Определим эти значения.

5.5Теплоемкость газа при постоянном объеме – C_V (V=const)

$$C_V = (\frac{dQ}{dT})_V$$

I начало термодинамики $dQ = dU + pdV$. Тогда $C_V = \frac{dU}{dT}$. Для одного моля идеального газа $U_M = \frac{i}{2}RT$. Тогда $C_V = \frac{i}{2}R\frac{dT}{dT} = \frac{i}{2}R$, где i – число степеней свободы молекул газа, R – универсальная газовая постоянная.

У одноатомных газов $i = 3$, у двухатомных – $i = 5$, у многоатомных – $i = 6$. Таким образом, молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2}R \tag{134}$$

5.6 Теплоемкость газа при постоянном давлении – *Cp (p=const)*

$$C_p = (\frac{dQ}{dT})_p$$

I начало термодинамики $dQ = dU + pdV$. Тогда $C_p = (\frac{dU}{dT})_p + p\frac{dV}{dT}$.

Для одного моля идеального газа уравнение состояния (уравнение Клапейрона) $pV = RT \Rightarrow V = \frac{RT}{p}$

Тогда

$$C_p = (\frac{dU}{dT})_p + p\frac{RdT}{pdT} = (\frac{dU}{dT})_p + R = \frac{i}{2}R + R = (\frac{i+2}{2})R$$

Следовательно, молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении

$$C_p = \left(\frac{i+2}{2}\right)R \tag{135}$$

Отношение $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ называется *термическим коэффициентом* и оно для всех газов > 1, т. к. $C_p > C_V$ за счет работы по изменению объема газа.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} \tag{136}$$

Тогда для одноатомного газа $\gamma = \frac{3+2}{3} = 1,67$. Для двухатомного $\gamma = \frac{5+2}{5} = 1,4$. Для многоатомного $\gamma = \frac{6+2}{6} = 1,33$.

Разность между этими молярными теплоемкостями представляет собой уравнение Майера и имеет вид

$$C_p - C_V = R \tag{137}$$

Отсюда вытекает физический смысл универсальной газовой постоянной *R*. Это величина работы по нагреву или охлаждению одного моля идеального газа на один градус абсолютной температурной шкалы.

Для одного моля газа для этого требуется, как определялось ранее, 8,31 Дж тепловой энергии.

5.7 Адиабатический процесс

Адиабатический (адиабатный) процесс-это процесс без теплообмена с окружающей средой. Он происходит в работе быстроходных двигателях внутреннего сгорания, при распространении звуковой волны в воздухе и т.п. Для этого процесса в I начале термодинамики $dQ = dU + dA$ изменение теплоты равно нулю и формула показывает, что работа в адиабатическом процессе происходит за счет уменьшения внутренней энергии газа

$$0 = dU + dA,\ dA = -dU$$

Получим уравнение адиабаты.

$dU + dA = 0,\ dU + pdV = 0$. $C_V = \frac{dU}{dT}$. $dU = C_V dT$. $C_V dT + pdV = 0$.

Возьмем один моль идеального газа. Для него уравнение состояния $pV = RT$. Продифференцируем это выражение по всем переменным $pdV + Vdp = RdT$.

$$dT = \frac{pdV + Vdp}{R}.\ C_V\left(\frac{pdV + Vdp}{R}\right) + pdV = 0.\ C_V\left(\frac{pdV + Vdp}{C_p - C_V}\right) + pdV = 0.$$

Преобразования приводят к виду $pC_V dV + VC_p dp = 0$. Учитывая, что $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, получаем

$Vdp + \gamma pdV = 0$. $\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$. $\int \frac{dp}{p} + \gamma \int \frac{dV}{V} = 0$. $\ln p + \gamma \ln V = \ln const$. То есть

$$pV^{\gamma} = const \tag{138}$$

Данная формула является уравнением адиабатического процесса в координатах давление-объем (***уравнением Пуассона***) и позволяет сравнить с изотермическим процессом.

Формула изотермического процесса $pV = const$. Значит формально у этого процесса термический коэффициент $\gamma = 1$. У адиабатического процесса $\gamma > 1$. Значит, график адиабаты будет круче изотермы (рисунок 60: 1-изотерма, 2-адиабата)

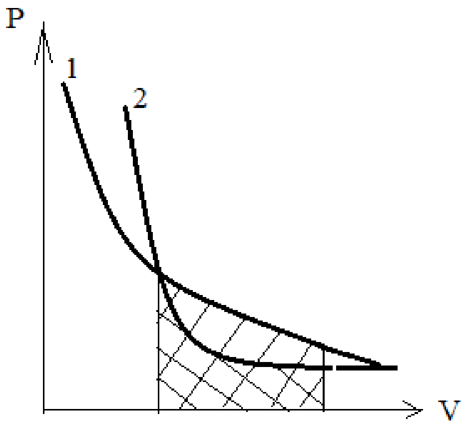


Рисунок 60

Заштрихованные площади под кривыми представляют собой графическое изображение работы этих процессов. Для адиабатического процесса математически эта работа равна

$$dA = -dU \Rightarrow dA = -C_V dT \Rightarrow A = C_V(T_1 - T_2)$$

$$A = C_V(T_1 - T_2)$$

5.8 Круговой процесс. Цикл Карно. Коэффициент полезного действия тепловой машины.

Круговым процессом, или ***циклом,*** называется такой процесс, когда термодинамическая система, пройдя несколько состояний и совершив работу, вернулась в первоначальное состояние. Примером такого процесса может служить график, изображенный на рисунке 61.

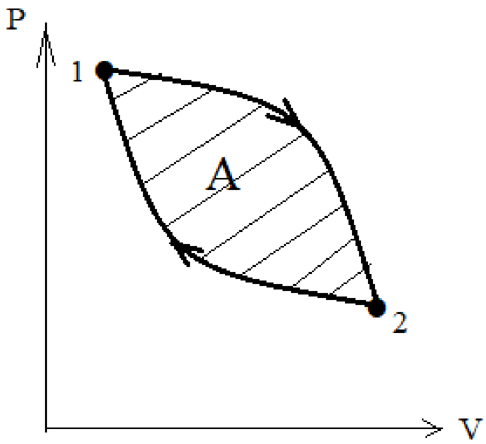


Рисунок 61

На данном графике работа представляет собой площадь заштрихованной фигуры.

Французский инженер Карно установил, что любая тепловая машина будет совершать полезную работу, если будет периодически совершать замкнутые циклы, включающие изотермический и адиабатический процессы. Он рассмотрел принцип действия четырехступенчатого кругового процесса, состоящего из двух изотерм и двух адиабат для одного моля идеального газа. И теоретически обосновал эффективность такого процесса. Этот принцип лежит в основе работы тепловых машин (рисунок 62).

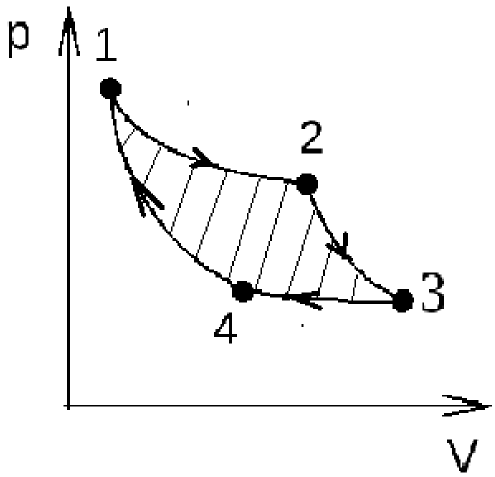


Рисунок 62

Участок **1-2** – изотермический процесс при температуре T_1. Система совершает работу для одного моля газа

$$A_1 = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Участок **2-3** – адиабатический процесс, при котором совершается работа

$$A_2 = C_V(T_1 - T_2)$$

Участок **3-4** – изотермический процесс при температуре T_2 (обратный изотермический процесс –сжатие газа). Его работа считается отрицательной:

$$A_3 = -C_V(T_2 - T_1)$$

Участок **4-1** – адиабатический процесс, при котором совершается работа по сжатию газа:

$$A_4 = -RT_1 \ln\frac{V_1}{V_4}$$

Тогда суммарная работа всего цикла

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \neq 0$$

Такая тепловая машина совершает полезную работу (рисунок 63).

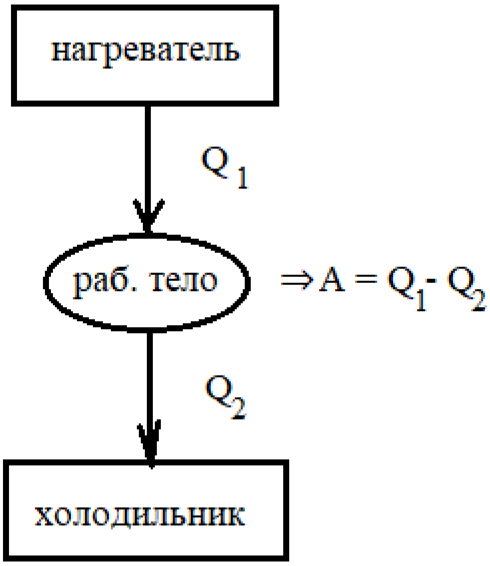


Рисунок 63

И по теореме Карно ее коэффициент полезного действия (КПД) определяется формулой

$$\eta(КПД) = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

(139)

где Q_1, Q_2 соответственно теплота нагревателя и холодильника, а T_1, T_2 – их абсолютные температуры.

То есть этот коэффициент для всех процессов < 1, что говорит о невозможности создания вечного двигателя.

5.9 Энтропия. II начало термодинамики

На основании теоремы Карно

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Если учесть, что $Q_2 < 0$, то

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Выражение $\frac{Q}{T}$ называется ***приведенной теплотой***. Поэтому для цикла Карно алгебраическая сумма приведенных теплот равна

$$\sum \frac{Q}{T} = 0$$

Рассмотрим произвольный обратимый термодинамический цикл (рисунок 64).

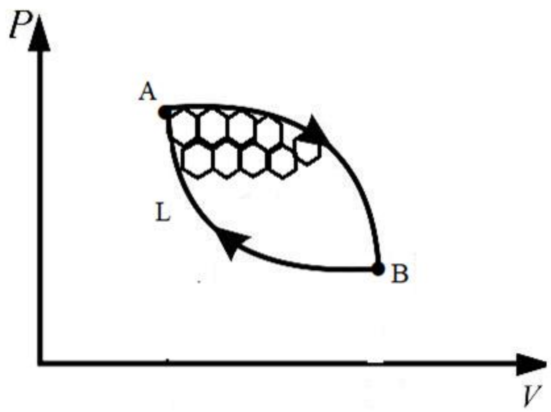


Рисунок 64

Разобьём этот процесс на очень большое число циклов Карно (множество изотерм и адиабат). Пусть dQ это теплота, получаемая рабочим телом на бесконечно малом участке этого цикла. Тогда

$$\sum \frac{dQ}{T} = 0$$

При бесконечно большом числе бесконечно малых элементов суммирования ($n \to \infty$) суммирование заменяется на интегрирование по замкнутому контуру длиною L данного кругового цикла

$$\oint_L \frac{dQ}{T} = 0 \qquad (140)$$

Из этого равенства следует, что подинтегральное выражение $\frac{dQ}{T}$ представляет собой полный дифференциал термодинамической функции S, которая называется ***энтропией.***

$$\frac{dQ}{T} = dS \qquad (141)$$

Наряду с энергией, энтропия является важной характеристикой термодинамических процессов и зависит от конечного и начального состояния системы, но не зависит от пути, по которому перехода системы от начального в конечное состояние.

Если система перешла из состояния **А** в состояние **В**, то

$$\int_A^B dS = S_B - S_A = \Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$ – изменение энтропии

Функцию энтропия ввел Клаузиус, который установил, что изменение энтропии в изолированной системе:

1) для обратимых процессов $\Delta S = 0$,
2) для необратимых процессов $\Delta S > 0$.

Реальные процессы в природе являются необратимыми и поэтому это неравенство составило ***II начало термодинамики.***

$\Delta S > 0$ – все процессы в природе идут в сторону увеличения энтропии

Статистический смысл энтропии – это мера вероятности состояния системы и по Больцману она равна

$$S = k \ln W, \qquad (142)$$

где k – постоянная Больцмана, W – вероятность состояния системы.

Поэтому по определению изменения энтропии можно судить о возможности или невозможности термодинамического процесса при выбранных условиях эксперимента.

5.10 Реальный газ. Уравнение Ван-дер-Ваальса

В отличие от идеального газа реальный газ находится при экстремальных давлениях и температурах, при которых молекулы газа соприкасаются друг с другом, оказывают взаимное давление и следует учитывать размеры частиц. Поэтому в уравнение состояния идеального газа надо ввести две поправки: на дополнительное давление и размеры газовых частиц. Для одного моля газа – это:

$$(P+\Delta P)(V_M-b)=RT,$$

где ΔP – дополнение давление (внутреннее давление молекул друг на друга), b –объем молекул.

Чтобы определить внутреннее давление рассмотрим условную плоскость соприкосновения молекул газа (рисунок 65)

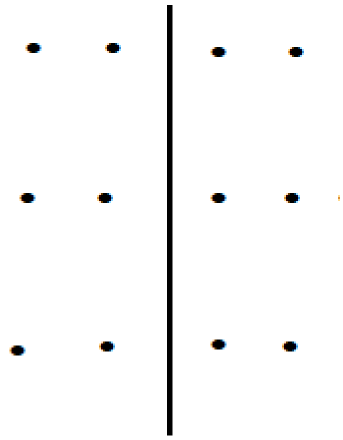


Рисунок 65

Сила взаимодействия частиц, как и дополнительное давление пропорциональны квадрату удельной плотности газа, т.е.

$$\Delta P \sim \rho^2=\frac{a}{V_M^2},$$

где a-коэффициент пропорциональности, зависящий от сорта газа.

Тогда уравнение состояния одного моля реального газа примет вид

$$(P+\frac{a}{V_M^2})(V_M-b)=RT$$

Преобразование этого уравнения приводит к формуле

$$V_M^3-(b+\frac{RT}{P})V_M^2+\frac{a}{P}V_M-\frac{ab}{P}=0 \qquad (143)$$

Данное уравнение (143) называется ***уравнением Ванн-дер-Ваальса*** для одного моля реального газа. Оно является кубическим и имеет три корня: два мнимых и один действительный. Графическое решение этого уравнения и изображение изотермы ванн-дер-Ваальса представлены на рисунке 66.

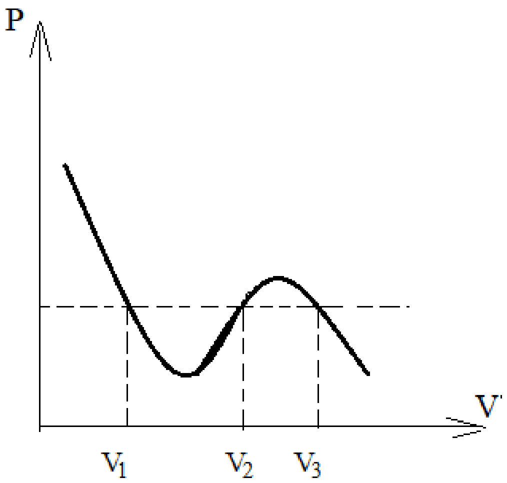


Рисунок 66

При нагревании реального газа постепенно кривые изотерм переходят критическое состояние ***К*** и в зависимости от сорта газа и внешних условий реальный газ превращается в идеальный (верхняя изотерма на рисунке 67).

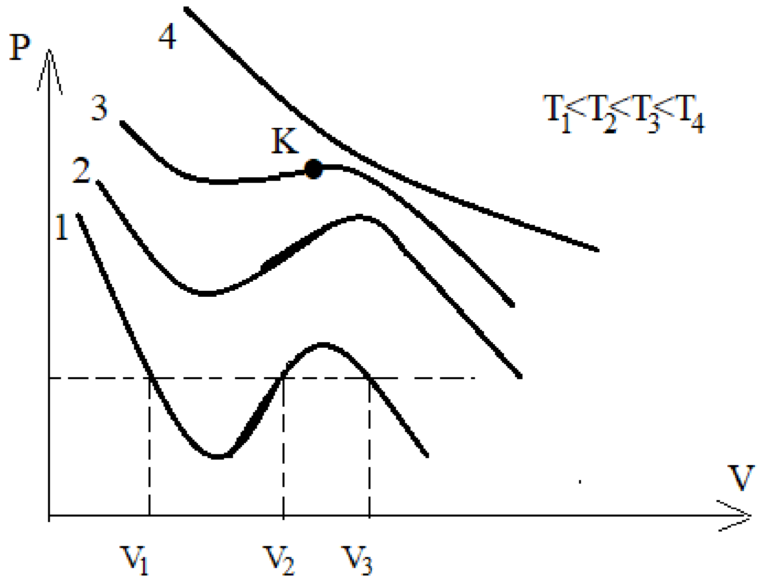


Рисунок 67

В практике реальный газ находится в сжатом состоянии в газовых баллонах при высоком давлении и низкой температуре.

Например, критические точки, когда идеальный газ переходит в реальный, для кислорода равны для температуры 154 К и для давления 50 технических атмосфер. Для водорода соответственно 33 К и 13 атмосфер, для углекислого газа – 304 К и 70 атмосфер.

Контрольные вопросы

1. Какие степени свободы бывают у молекулы?
2. Что называется внутренней энергией тела?
3. Чему равняется внутренняя энергия идеального газа?
4. Чему равняется элементарная работа газа?
5. Что называется теплом?
6. Что называется теплоемкостью тела?
7. Чему равняется молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме?
8. Чему равняется молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении?
9. Сформулировать и записать уравнение первого начала термодинамики.
10. Сформулировать второе начало термодинамики.
11. Что называется термодинамическим циклом?
12. Чему равняется КПД идеальной машины Карно?
13. Какой физический смысл имеет энтропия?
14. Формула Клаузиуса для элементарного изменения энтропии при обратимом термодинамическом процессе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вржащ Е. Э. Курс физики: оптика, атом, атомное ядро, элементарные частицы: учебное пособие / Е.Э. Вржащ, Ю.Ю. Клибанова, – Дюссельдорф, Германия: Изд-во: LAP LAMBERT, 2019. – 182 с
2. Вржащ Е. Э. Физика Микромира: Атомное ядро и элементарные частицы: учебное пособие / Е.Э. Вржащ, Ю.Ю. Клибанова, – Дюссельдорф, Германия: Изд-во: LAP LAMBERT, 2020. – 55 с
3. Вржащ Е. Э. Физика: электричество и магнетизм : учебное пособие / Е. Э. Вржащ, Ю. Ю. Клибанова. - Электрон. текстовые дан. - Saarbrücken : Lap Lambert Academic Publishing; Иркутск : Изд-во ИрГАУ им. А. А. Ежевского, 2017. - 144 с.
4. Клибанова Ю. Ю. Физика: волновая и квантовая оптика, физика атомного ядра и элементарных частиц: учебное пособие / Ю. Ю. Клибанова, Е. Э. Вржащ; Иркут. гос. аграр. ун-т им. А. А. Ежевского. - Электрон. текстовые дан. - Иркутск: Изд-во ИрГАУ им. А. А. Ежевского, 2019. - 127 с.
5. Трофимова Т. И. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. - 7-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2002. - 542 с.

СОДЕРЖАНИЕ